УДК 514.76

Ю. И. Попов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
yurij.popoff2015@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5840-6447
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-10

Касательно *r*-оснащенные гиперполосы проективного пространства

Дано задание в репере 1-го порядка касательно r-оснащенной гиперполосы проективного пространства. Для простоты изложения адаптируем репер полю нормалей 1-го рода. Вводится в рассмотрение тензор неголономности поля оснащающих Λ-плоскостей. Обращение тензора неголономности в нуль приводит к трем различным интерпретациям гиперполосы. Рассматриваются фокальные образы, ассоциированные с гиперполосой, с помощью которых построена плоскость Нордена — Тимофеева указанной гиперполосы.

В заключение рассматриваются π-структуры поля касательных плоскостей базисной поверхности гиперполосы.

Ключевые слова: касательно r-оснащенная гиперполоса, тензор неголономности, $T\Lambda$-виртуальная нормаль, алгебраическое многообразие, фокальное многообразие, плоскость Нордена — Тимофеева, аффинор, неголономная композиция Нордена.

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.

§ 1. Поля фундаментальных и геометрических объектов касательно *r*-оснащенной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$

1. Дифференциальные уравнения регулярной *r*-оснащенной гиперполосы

В работе используется следующая схема индексов:

$$i,j,k=\overline{1,m};\ \ p,q,t=\overline{1,r};\ s=m-r,\ \widetilde{A}=\{n;\alpha;\varepsilon\};$$
$$\alpha,\beta=\overline{m+1,n-m-1};\ u=\{\varepsilon,n\};\ \varepsilon,\sigma,\eta=\overline{r+1,m}.$$

1. Рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [1], базисная поверхность V_m которой оснащена полем касательных плоскостей $\Lambda(A_0)\overset{def}{=}\Pi_r(A_0)$ (Λ-плоскостей, $r<m$), удовлетворяющих условиям

$$A_0\in\Lambda(A_0)\subset T(A_0)\,. \tag{1}$$

Поверхность V_m, удовлетворяющая условиям (1), называется касательно *r*-оснащенной [2; 3].

Определение. *Гиперполоса* H_m называется *касательно r-оснащенной*, если ее базисная поверхность V_m является касательно *r*-оснащенной поверхностью $V_{m,r}$ [4].

Касательно *r*-оснащенные гиперполосы будем обозначать символом $H_{m,r}(\Lambda)$. Отнесем гиперполосу к реперу 1-го порядка R^1:

$$A_0\in V_m\,,\ \{A_i\}\subset T_m(A_0)\,,\ \{A_\alpha\}\subset X_{n-m-1}(A_0)\,,\ A_n\notin H_{n-1}\,,$$

причем точки $\{A_p\}$ репера поместим в Λ-плоскость. Тогда гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ в выбранном репере 1-го порядка задается уравнениями

$$\begin{gathered}
\omega_0^n = \omega_0^\alpha = \omega_\alpha^n = 0, \\
\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j, \\
\nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \\
\nabla \Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{ij}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \omega_0^k, \\
\nabla \Lambda_{\alpha i}^s + \Lambda_{\alpha i}^s \omega_0^0 - \delta_i^s \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha ij}^s \omega_0^j, \\
\nabla \Lambda_{ijk}^n + 2\Lambda_{ijk}^n \omega_0^0 + \Lambda_{(ij}^n \omega_{k)}^0 - \Lambda_{(ij}^n \Lambda_{k)s}^n \omega_n^s = \Lambda_{ijkt}^n \omega_0^t,
\end{gathered} \tag{2}$$

причем $\Lambda_{[ij]}^n = \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0,\ \Lambda_{s[i}^n \Lambda_{|\alpha|j]}^s = 0$, а также уравнениями

$$\omega_p^n = \Lambda_{pi}^\varepsilon,\ \nabla \Lambda_{pi}^\varepsilon + \Lambda_{pi}^\varepsilon \omega_0^0 + \Lambda_{pi}^n \omega_n^\varepsilon - \delta_i^\varepsilon \omega_p^0 = \Lambda_{pij}^\varepsilon \omega_0^j. \tag{3}$$

Для простоты изложения адаптируем репер R^1 полю нормалей первого рода. Такой репер назовем репером $R^1(N)$. В этом репере имеем

$$\omega_n^i = N_{nk}^i \omega_0^k, \tag{4}$$

$$\nabla N_{nk}^i + N_{nk}^i \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha k}^i \omega_n^\alpha - \delta_k^i \omega_n^0 = N_{nks}^i \omega_0^s, \tag{5}$$

а уравнения (3) примут вид

$$\nabla \Lambda_{pq}^\varepsilon + \Lambda_{pq}^\varepsilon \omega_0^0 = \Lambda_{pqk}^\varepsilon \omega_0^k, \tag{6}$$

$$\nabla \Lambda_{p\sigma}^\varepsilon - \Lambda_{pq}^\varepsilon \omega_\sigma^q - \delta_\sigma^\varepsilon \omega_p^0 = \Lambda_{p\sigma k}^\varepsilon \omega_0^k. \tag{7}$$

Поле квазитензора 2-го порядка $\{\Lambda_{pq}^\varepsilon\}$, определенное уравнениями (6), (7), задает поле касательно оснащающих Λ-плоскостей в репере $R^1(N)$. Отметим, что те геометрические объекты (факты), которые будут получены при использовании компонент объекта $\{\Lambda_{pi}^\varepsilon\}$, характерны лишь для геометрии касательно r-оснащенной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$.

2. Система дифференциальных уравнений

$$\omega_0^\varepsilon = 0, \tag{8}$$

ассоциированная с полем касательно оснащенных Λ-плоскостей гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор 2-го порядка $\{r_{pq}^\varepsilon\}$:

$$r^{\varepsilon}_{pq} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\varepsilon}_{pq} - \Lambda^{\varepsilon}_{qp}\right),\ \nabla r^{\varepsilon}_{pq} + r^{\varepsilon}_{pq}\omega^{0}_{0} = r^{\varepsilon}_{pqk}\omega^{k}_{0}\,, \tag{9}$$

то есть когда тензор $\{\Lambda^{\varepsilon}_{pq}\}$ симметрический.

Тензор $\{r^{\varepsilon}_{pq}\}$ (9) называется тензором неголономности поля оснащающих Λ-плоскостей. Поле Λ-плоскостей (распределение Λ-плоскостей) будем называть голономным, если его тензор неголономности $\{r^{\varepsilon}_{pq}\}$ тождественно равен нулю. При $r^{\varepsilon}_{pq} = 0$ базисная поверхность $V_{m,r}$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое многообразие r-мерных поверхностей V_r (плоскости Λ огибаются r-мерными поверхностями $(m-r)$-параметрического семейства). При смещении точки A_0 вдоль фиксированной поверхности V_r уравнения (2, 4, 8) относительно репера $R^1(N)$ можно записать в следующем виде (здесь мы не выписываем замыкания этих уравнений):

$$\begin{cases} \omega^{\tilde{A}}_{0} = 0,\ \omega^{u}_{\varepsilon} = \Lambda^{u}_{\varepsilon p}\omega^{p}_{0}\,, \\ \omega^{\tilde{A}}_{p} = \Lambda^{\tilde{A}}_{pq}\omega^{q}_{0}\,,\ \Lambda^{\tilde{A}}_{pq} = \Lambda^{\tilde{A}}_{qp}\,, \end{cases} \tag{10}$$

$$\omega^{n}_{\alpha} = 0,\ \omega^{i}_{\alpha} = \Lambda^{i}_{\alpha j}\omega^{j}_{0}\,,\ \omega^{i}_{n} = N^{i}_{nk}\omega^{k}_{0}\,. \tag{11}$$

Отсюда с использованием результатов работ [4; 5, I, § 3] следует, что обращение в нуль тензора неголономности Λ-распределения:

1) есть условие, при котором гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое семейство оснащенных полос $V_{m,r}(H)$;

2) показывает, что гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое семейство касательно m-оснащенных гиперполос $H_r(M)$;

3) означает, что гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое многообразие вырожденных нераспадающихся гиперполос ранга r [6—8].

2. *TΛ*-виртуальные нормали 1-го и 2-го рода оснащенных *Λ*-плоскостей

Определение. *s-мерная плоскость* $L(A_0) \subset T_m(A_0)$, *удовлетворяющая условиям*

$$L(A_0) \cap \Lambda(A_0) = A_0,\ [L(A_0), \Lambda(A_0)] = T_m(A_0),\quad A_0 \in L(A_0),$$

называется *TΛ-виртуальной нормалью 1-го рода данной Λ-плоскости.*

Плоскость $N_{r-1}(A_0) \subset \Lambda(A_0)$, не проходящая через точку A_0, называется *TΛ*-виртуальной нормалью 2-го рода *Λ*-плоскости [9; 10].

TΛ-виртуальную нормаль 1-го рода $L(A_0)$ (*L*-плоскость) зададим точкой A_0 и точками $T_\varepsilon = A_\varepsilon + \nu_\varepsilon^p A_p$, то есть $L(A_0) = [A_0, T_\varepsilon]$. Поле *L*-плоскостей в репере $R^1(N)$ определяется системой дифференциальных уравнений

$$\nabla \nu_\varepsilon^p + \omega_\varepsilon^p = \nu_{\varepsilon k}^p \omega_0^k. \tag{12}$$

Каждая нормаль $N_{m-1}(A_0)$ 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ порождает *TΛ*-виртуальную нормаль 2-го рода

$$N_{r-1}(A_0) = N_{m-1}(A_0) \cap \Lambda(A_0) = [N_p] = [A_p + \nu_p^0 A_0] \tag{13}$$

и *TL*-виртуальную нормаль 2-го рода

$$\begin{gathered} N_{s-1}(A_0) = N_{m-1}(A_0) \cap L(A_0) = \\ = [M_\varepsilon] = [A_\varepsilon + \nu_\varepsilon^p A_p + \nu_\varepsilon^0 A_0], \end{gathered} \tag{14}$$

где $\hat{\nu}_\varepsilon^0 = \nu_\varepsilon^0 + \nu_p^0 \nu_\varepsilon^p$, $\nabla \hat{\nu}_\varepsilon^0 + \nu_\varepsilon^p \omega_p^0 + \omega_\varepsilon^0 = \hat{\nu}_{\varepsilon k}^0 \omega_0^k$.

Плоскости $N_{r-1}(A_0)$ (12) и $N_{s-1}(A_0)$ (13) задаются соответственно следующими конечными уравнениями:

$$N_{r-1}(A_0): \begin{cases} x^{\widetilde{A}} = 0, \\ x^0 - \nu_p^0 x^p = 0; \end{cases} \quad N_{s-1}(A_0): \begin{cases} x^0 - \nu_\varepsilon^0 x^\varepsilon = 0, \\ x^p - \nu_\varepsilon^p x^\varepsilon = 0, \\ x^u = 0. \end{cases}$$

В общем случае при $m - r \le \dfrac{r(r+1)}{2}$ из компонент объекта $\{\Lambda_{pq}^\varepsilon\}$ может быть построен относительный инвариант $J \neq 0$ [11], а затем обращенный тензор

$$\overset{*}{\Lambda}{}_\varepsilon^{pq} = \frac{\partial \ln J}{\partial \Lambda_{pq}^\varepsilon}$$

для тензора Λ_{pq}^ε (6), где

$$\overset{*}{\Lambda}{}_{pq}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\Lambda_{pq}^\varepsilon + \Lambda_{qp}^\varepsilon),$$

$$\lambda_{pq}^\varepsilon \overset{*}{\lambda}{}_\varepsilon^{qt} = (m-r)\delta_p^t, \; \Lambda_{pq}^\sigma \overset{*}{\Lambda}{}_\eta^{qp} = r\delta_\eta^\sigma .$$

Следуя работе [12], рассмотрим биекцию между $T\Lambda$-виртуальными нормалями 1-го и 2-го рода, определяемую по формуле

$$\nu_\varepsilon^p = -(\Lambda_{q\varepsilon}^\sigma + \delta_\varepsilon^\sigma \nu_q^0)\overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt} \overset{*}{T}{}_t^p , \tag{15}$$

где $\overset{*}{T}{}_t^p$ — обратный тензор для тензора

$$T_p^t = \Lambda_{pq}^\sigma \overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt} .$$

Пучок нормалей 2-го рода $\nu_i^0(\tau) = \tau F_i^0 - (\tau - 1)W_i^0$ гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ индуцирует (высекает) пучок $T\Lambda$-виртуальных нормалей 2-го рода (f, w):

$$\nu_p^0(\tau) = \tau F_p^0 - (\tau - 1)W_p^0. \tag{16}$$

Относительно $R^1(\nu)$ уравнения его $(r-2)$-мерной вершины C_{r-2} имеют вид

$$x^u = 0,\ x^\varepsilon = 0,\ x^0 - F_p^0 x^p = 0,\ x^0 - W_p^0 x^p = 0.$$

$T\Lambda$-виртуальным нормалям 2-го рода $F_{r-1}\{F_p^0\}$ и $W_{r-s}\{W_p^0\}$, порождающим пучок *(f, w)* (16), в биекции (15) соответствуют $T\Lambda$-виртуальные нормали 1-го рода F_s и W_s, определяемые квазитензорами

$$F_s:\ F_\eta^p = -(\Lambda_{qn}^\sigma + \delta_\eta^\sigma F_q^0)\overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt}\overset{*}{T}{}_t^p\ ,$$

$$W_s:\ W_\eta^p = -(\Lambda_{q\eta}^\sigma + \delta_\eta^\sigma W_q^0)\overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt}\overset{*}{T}{}_t^p\ .$$

Таким образом, в каждой точке $A_0 \in V_m$ плоскости $F_s(A_0)$ и $W_s(A_0)$ задают однопараметрический пучок $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода

$$\Phi_\varepsilon^p(\sigma) = F_\varepsilon^p + \sigma(W_\varepsilon^p - F_\varepsilon^p), \tag{17}$$

где σ — абсолютный инвариант.

Величины $W_\varepsilon^p - F_\varepsilon^p \overset{def}{=} \Phi_\varepsilon^p$ являются компонентами тензора 3-го порядка.

Кроме того, отметим, что в каждой $T\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода пучок нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ индуцирует (высекает) пучок TL-виртуальных нормалей 2-го рода, $(s-2)$-мерная ось которого определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^u = 0, \ x^0 - \hat{F}^0_\varepsilon(\nu)x^\varepsilon = 0, \\ x^p - \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon = 0, \ [\hat{W}^0_\varepsilon(\nu) - \hat{F}^0_\varepsilon(\nu)]x^\varepsilon = 0, \end{cases} \tag{18}$$

где $\hat{F}^0_\varepsilon(\nu) = F^0_\varepsilon + F^0_p \nu^p_\varepsilon$, $\hat{W}^0_\varepsilon(\nu) = W^0_\varepsilon + W^0_p \nu^p_\varepsilon$.

В результате приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка пучок нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ порождает однопараметрические пучки (16, 17) $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го и 2-го рода, соответствующих друг другу в биекции (15), а в каждой $T\Lambda$-виртуальной нормали — однопараметрический пучок TL-виртуальных нормалей 2-го рода с осью (18).*

§ 2. Фокальные образы, ассоциированные с гиперполосой $H_{m,r}(\Lambda)$. Плоскость Нордена — Тимофеева

1. Поле нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле касательно оснащающих Λ-плоскостей определяют на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ поле $(n-s)$-плоскостей $\pi_{n-s} = [\mathcal{N}_{n-m}, \Lambda]$ (поле π-плоскостей, $s = m - r$). Относительно локального репера $R^1(N)$ уравнения, определяющие плоскость $\pi(A_0)$ поля π-плоскостей, имеют вид

$$x^\varepsilon = 0.$$

При смещении точки A_0 вдоль произвольной кривой

$$\omega^u_0 = 0, \ \omega^i_0 = \rho^i \theta, \ d\theta = \theta \wedge \theta_1,$$

лежащей на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, координаты точек фокального многообразия π-плоскости удовлетворяют уравнениям

$$(\delta^\varepsilon_k x^0 + \Lambda^\varepsilon_{pk} x^p + \Lambda^\varepsilon_{\alpha k} x^\alpha + N^\varepsilon_{nk} x^n)\rho^k = 0, \ x^\varepsilon = 0 \ (\rho^u = 0). \tag{19}$$

Пусть квазитензор $\{V_\varepsilon^p\}$ задает произвольную инвариантную $T\Lambda$-виртуальную нормаль 1-го рода ν_s (ν_s-плоскость). При смещении точки A_0 вдоль кривых

$$\omega_0^\alpha = 0,\ \rho^p - \nu_\varepsilon^p\,\rho^\varepsilon = 0\,,$$

принадлежащих полю ν_s-плоскостей, система уравнений (19) примет вид

$$\begin{cases} x^\varepsilon = 0\ (\rho^u = 0), \\ [\delta_\eta^\varepsilon x^0 + (\Lambda_{p\eta}^\varepsilon + \Lambda_{pq}^\varepsilon \nu_\eta^q) x^p + (\Lambda_{\alpha\eta}^\varepsilon + \Lambda_{\alpha p}^\varepsilon \nu_\eta^p) x^\alpha + \\ + (N_{n\eta}^\varepsilon + N_{np}^\varepsilon \nu_\eta^p) x^n]\rho^\eta = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Так как ρ^η не все равны нулю, то из (20) следует

$$\begin{cases} x^\varepsilon = 0, \\ \det\left\| \delta_\eta^\varepsilon x^0 + (\Lambda_{p\eta}^\varepsilon + \Lambda_{pq}^\varepsilon \nu_\eta^q) x^p + (\Lambda_{\alpha\eta}^\varepsilon + \Lambda_{\alpha p}^\varepsilon \nu_\eta^p) x^\alpha + \right. \\ \left. + (N_{n\eta}^\varepsilon + N_{np}^\varepsilon \nu_\eta^p) x^n \right\| = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Уравнения (21) в общем случае определяют алгебраическое многообразие размерности $(n-s-1)$ порядка $s=m-r$, которое обозначим $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$. Это многообразие лежит в π-плоскости. Соответствующая Λ-плоскость пересекает многообразие $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$ по алгебраическому многообразию $\Phi_{r-1}(\Lambda,\nu)$ порядка и размерности $(r-1)$:

$$\begin{cases} x^\varepsilon = 0,\ x^u = 0, \\ \det\left\| \delta_\sigma^\varepsilon x^0 + (\Lambda_{p\sigma}^\varepsilon + \nu_\sigma^q \Lambda_{pq}^\varepsilon) x^p \right\| = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия (22) есть плоскость $\varepsilon_{r-1}(A_0) \subset \Lambda(A_0)$, которая задается уравнениями

$$x^{\widetilde{A}} = 0,\ x^0 - \varepsilon_p^0 x^p = 0\,,$$

где

$$\varepsilon_p^0 = -\frac{1}{s}(\Lambda_{p\sigma}^{\sigma} + \nu_{\sigma}^{q}\Lambda_{pq}^{\sigma}), \tag{23}$$

$$\nabla\varepsilon_p^0 + \omega_p^0 = \varepsilon_{pk}^0\omega_0^k. \tag{24}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{\varepsilon_p^0\}$ (23), определяемое уравнениями (24), задает поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей 2-го рода, соответствующих полю $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода $\nu_s\{\nu_{\sigma}^{q}\}$ в проективитете Бомпьяни — Пантази (23).

2. С другой стороны, поле внутренних инвариантных нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле ν_s -плоскостей порождают на базисной поверхности V_m гиперполосы поле внутренних инвариантных $(n-r)$-плоскостей Ω_{n-r} (поле Ω-плоскостей), то есть- $\Omega_{n-r}(A_0) = [N_{n-m}(A_0),\ \nu_s(A_0)]$, $\forall A_0 \in V_m$. Конечные уравнения плоскости $\Omega_{n-r}(A_0)$ (нормаль 1-го рода соответствующей Λ-плоскости) имеют вид

$$x^p - \nu_{\varepsilon}^{p}x^{\varepsilon} = 0.$$

Аналогично (см. п. 1) находим, что система уравнений

$$\begin{cases} x^p = \nu_{\varepsilon}^{p}x^{\varepsilon}, \\ \det\left\|\delta_q^p x^0 + (\nu_{\varepsilon q}^{p} + \nu_{\sigma}^{p}\nu_{\varepsilon}^{t}\Lambda_{tq}^{\sigma})x^{\varepsilon} + (\Lambda_{\alpha q}^{p} - \nu_{\sigma}^{p}\Lambda_{\alpha q}^{\sigma})x^{\alpha} + \right. \\ \left. + (N_{nq}^{p} - \nu_{\sigma}^{p}N_{np}^{\sigma})x^n\right\| = 0 \end{cases} \tag{25}$$

определяет фокальное многообразие $\Psi_{n-r-1}(\Omega,\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. В общем случае это алгебраическое многообразие размерности $(n-r-1)$ порядка r. Многообразие

$\Psi_{n-r-1}(\Omega,\Lambda)$ (25) лежит в Ω-плоскости и пересекается с соответствующей ν_s-плоскостью по алгебраическому многообразию $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ порядка r и размерности $s-1$:

$$\begin{cases} x^u = 0,\ x^p = \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon, \\ \det\left\|\delta^p_q x^0 + (\nu^p_{\varepsilon q} - \nu^p_\sigma \nu^t_\varepsilon \Lambda^\sigma_{tq}) x^\varepsilon\right\| = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, в каждой ν_s-плоскости некоторого пучка $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода, определяемой квазитензором $\{\nu^p_\varepsilon\}$, уравнения (26) задают фокальное многообразие $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ есть $(s-1)$-плоскость $\zeta_{s-1} \subset \nu_s(A_0)$, которая задается конечными уравнениями

$$x^0 - \rho^0_\sigma x^\sigma = 0,\ x^p - \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon = 0,\ x^u = 0,$$

$$\rho^0_\sigma = -\frac{1}{r}(\nu^p_{\sigma p} - \nu^p_\sigma \nu^t_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{tp}).$$

Плоскость, натянутая на линейные поляры точки A_0 относительно фокальных многообразий $\Psi_{r-1}(\Lambda,\nu)$ (27) и $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ (26), то есть плоскость $\rho_{m-1}(A_0) = [\zeta_{r-1}(A_0),\ \zeta_{s-1}(A_0)]$ (ρ-плоскость), является плоскостью Нордена — Тимофеева [13] неголономной композиции $(\Lambda,\ \nu_s)$ [14]. Относительно локального репера $R^1(N)$ уравнения плоскости Нордена — Тимофеева $\rho_{m-1}(A_0)$ имеют вид

$$y^0 - p^0_i y^i = 0, \quad y^u = 0, \tag{27}$$

где $p^0_\varepsilon = \rho^0_\varepsilon - \varepsilon^0_\rho \nu^p_\varepsilon$, $p^0_p = \varepsilon^0_p$.

Геометрическая интерпретация объекта $\{\rho_{m-1}\}$ была найдена Р. Ф. Домбровским [15] для касательно r-оснащенных поверхностей проективного пространства.

Теорема 2. *Поле ТΛ-виртуальных нормалей 1-го рода* $\nu_s\{\nu_\varepsilon^p\}$ *индуцирует поле плоскостей Нордена — Тимофеева p (27) — поле нормалей 2-го рода регулярной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Порядок дифференциальной окрестности, в которой внутренним образом определено поле плоскостей Нордена — Тимофеева, на единицу выше порядка дифференциальной окрестности квазитензора* $\{\nu_\varepsilon^p\}$ *(12).*

Нормаль 1-го рода N_{n-m} пересекает многообразие $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$ (21) по алгебраическому многообразию $\Phi_{n-m-1}(\pi,\nu)$ размерности $(n-m-1)$ порядка s:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\left\| \delta_\sigma^\varepsilon x^0 + (\Lambda_{\alpha\sigma}^\varepsilon + \nu_\sigma^q \Lambda_{\alpha q}^\varepsilon)x^\alpha + (N_{n\sigma}^\varepsilon + \nu_\sigma^q N_{nq}^\varepsilon)x^n \right\| = 0, \end{cases} \tag{28}$$

а многообразие $\Psi_{n-r-1}(\Omega,\Lambda)$ (25) — по алгебраическому многообразию $\Psi_{n-m-1}(N,\Lambda)$ размерности $(n-m-1)$ порядка r:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\left\| \delta_q^p x^0 + (\Lambda_{\alpha q}^p - \nu_\sigma^p \Lambda_{\alpha q}^\sigma)x^\alpha + (N_{nq}^p - \nu_\sigma^p N_{nq}^\sigma)x^n \right\| = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Уравнения линейных поляр A_0 относительно многообразий (28), (29) представим соответственно в виде

$$x^i = 0, \;\; x^0 - \varepsilon_u^0 x^u = 0, \tag{30}$$

$$x^i = 0, \;\; x^0 - \rho_u^0 x^u = 0. \tag{31}$$

Уравнения (30), (31) задают соответственно $(n-m-1)$-мерные плоскости $\varepsilon_{n-m-1}(A_0)$ и $\zeta_{n-m-1}(A_0)$, принадлежащие нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ и не проходящие через точку A_0, то есть являющиеся оснащающими плоскостями Картана гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ [5]. В общем случае плоскости $\varepsilon_{n-m-1}(A_0)$ (30) и $\zeta_{n-m-1}(A_0)$ (31) различны и поэтому образуют пучок плоскостей Картана гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, осью которого является плоскость $\widehat{\varepsilon}_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^u = 0,\ x^0 - \varepsilon_u^0 x^u = 0,\ x^0 - \rho_u^0 x^u = 0\,. \qquad (32)$$

Следовательно, имеет место

Теорема 3. *С каждой $T\Lambda$-виртуальной нормалью 1-го рода $\nu_s\{\nu_i^p\}$ индуцируется в нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ пучок плоскостей Картана, осью которого является плоскость $\widehat{\varepsilon}_{n-m-2}(A_0)$ (32).*

§ 3. π-структуры поля касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$

1. Пусть на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ задано внутренним инвариантным образом поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода ν_s (в § 1, например, найдено однопараметрическое семейство таких полей (19)). Поле оснащающих Λ-плоскостей (T-структура [16]) и поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей ν_s (вторая T-структура) порождают π-структуру в расслоении касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Действительно, в каждой точке $A_0 \in V_m$ имеем

$$[\nu_s(A_0),\ \Lambda(A_0)] = T_m(A_0);\ \ \nu_s(A_0) \cap \Lambda(A_0) = A_0\,. \qquad (33)$$

Известно [17], что всякая π-структура вполне определяется полем аффинора $\{\mathcal{A}_j^i\}$, удовлетворяющего соотношениям

$$\mathcal{A}_k^j \mathcal{A}_i^k = \delta_i^j\,. \qquad (34)$$

Найдем компоненты аффинора $\mathcal{A}_j^i$, удовлетворяющего условиям (34) и (33). В силу выбора репера $R^1(N)$ можем написать следующие разложения:

$$T_i = \Lambda_i^k A_k \text{, где } \left\| \Lambda_i^k \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_q^p & 0 \\ \nu_\eta^p & \delta_\eta^\varepsilon \end{matrix} \right\|. \tag{35}$$

Так как точки T_i линейно независимы, то матрица Λ_i^k невырождена и, следовательно, для нее существует обратная матрица

$$\left\| \overset{*}{\Lambda}{}_i^k \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_q^f & 0 \\ -\nu_\varepsilon^f & \delta_\varepsilon^\sigma \end{matrix} \right\| \tag{36}$$

такая, что выполняются равенства

$$\Lambda_k^j \cdot \overset{*}{\Lambda}{}_i^k = \delta_i^j, \; \Lambda_i^k \cdot \overset{*}{\Lambda}{}_k^j = \delta_i^j .$$

Введем в рассмотрение тензор типа (1.1) (аффинор)

$$\mathcal{A}_j^i = \delta_j^i - 2\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_j^p, \; \nabla \mathcal{A}_j^i = \mathcal{A}_{jk}^i \omega_0^k , \tag{37}$$

где

$$\mathcal{A}_{jk}^i = -2(\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_{jk}^p - \overset{*}{\Lambda}{}_j^p \Lambda_{pk}^i), \tag{38}$$

компоненты которого в силу (35), (36) имеют следующую структуру

$$\mathcal{A}_p^q = -\delta_p^q, \; \mathcal{A}_p^\sigma = 0, \; \mathcal{A}_\sigma^p = 2\nu_\sigma^p, \; \mathcal{A}_\sigma^\varepsilon = \delta_\sigma^\varepsilon . \tag{39}$$

Таким образом, аффинор $\mathcal{A}_j^i$ (37), (39) охватывается объектами T-структур, индуцирующих данную π-структуру, и удовлетворяет условиям (34). Следствием теоремы 1 и приведенных исследований (§ 3, п. 1) является

Теорема 4. *Поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ несет однопараметрическое семейство π-структур, внутренне связанных с данной гиперполосой и определенных пучком аффиноров $\mathcal{A}^i_j(\sigma)$, где*

$$\left\|\mathcal{A}^i_j(\sigma)\right\| = \left\|\begin{matrix} -\delta^p_q & 0 \\ 2\nu^q_\varepsilon(\sigma) & \delta^\eta_\varepsilon \end{matrix}\right\|. \quad (40)$$

2. Установим критерий интегрируемости π-структуры (*Λ, ν*), определенной аффинором $\mathcal{A}^i_j$ (37). Известно [16], что интегрируемость π-структуры характеризуется обращением в нуль тензора кручения данной π-структуры. В свою очередь, так как тензор кручения π-структуры только постоянным множителем отличается от тензора Нейенхейса $\{\mathcal{T}^i_{kj}\}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^i_{kj} &= \mathcal{A}^p_j(\mathcal{A}^i_{pk} - \mathcal{A}^i_{kp}) - \mathcal{A}^p_k(\mathcal{A}^i_{pj} - \mathcal{A}^i_{jp}) + \\ &+ \mathcal{A}^\varepsilon_j(\mathcal{A}^i_{\varepsilon k} - \mathcal{A}^i_{k\varepsilon}) + \mathcal{A}^\varepsilon_k(\mathcal{A}^i_{\varepsilon j} - \mathcal{A}^i_{j\varepsilon}), \end{aligned} \quad (41)$$

то интегрируемость π-структуры (*Λ, ν*) сводится к обращению в нуль компонент тензора Нейенхейса в репере $R^1(N,\nu)$, адаптированном полю ν_s-плоскостей (ν_s-расслоению). В этом репере $\omega^p_\varepsilon = \nu^p_{\varepsilon k}\omega^k_0$ и $\nu^p_\varepsilon(\underline{\sigma}) = 0$ (($\underline{\sigma}$) — фиксированное значение параметра σ). Предварительно, продифференцировав равенства (34), получим следующие связи на компоненты аффинора $\mathcal{A}^i_j$ (37):

$$\mathcal{A}^j_{kl}\mathcal{A}^k_i + \mathcal{A}^j_k\mathcal{A}^k_{il} = 0\,. \quad (42)$$

Теперь, учитывая соотношения (34, 38, 39, 42), вычисляем компоненты тензора Нейенхейса π-структуры (*Λ, ν*):

$$\begin{cases} \mathcal{T}^i_{p\varepsilon} = 0,\ \mathcal{T}^p_{qt} = 0,\ \mathcal{T}^\varepsilon_{\sigma\eta} = 0, \\ \mathcal{T}^\varepsilon_{pq} = -4(\Lambda^\varepsilon_{pq} + \Lambda^\varepsilon_{qp}) = -8r^\varepsilon_{pq}, \\ \mathcal{T}^p_{\varepsilon\eta} = -4(\nu^p_{\varepsilon\eta}(\underline{\sigma}) + \nu^p_{\eta\varepsilon}(\underline{\sigma})) = -8r^\varepsilon_{pq}(\underline{\sigma}). \end{cases} \quad (43)$$

Из (43) следует, что обращение в нуль всех компонент тензора Нейенхейса равносильно равенству нулю тензоров неголономности r^{ε}_{pq} и $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ соответственно Λ-распределения и ν-распределения на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Таким образом, π-структура (Λ, $\nu(\underline{\sigma})$), определенная аффинором $\mathcal{A}^i_j(\underline{\sigma})$, интегрируема тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензоры неголономности r^{ε}_{pq} и $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ соответственно базовых распределений (Λ-распределения и ν_s-распределения) данной π-структуры. С другой стороны, интегрируемость π-структуры означает расслоение базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ на два семейства подмногообразий:

а) на s-параметрическое семейство r-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости Λ) Λ-распределения;

б) на r-параметрическое семейство s-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости $\nu_s(\underline{\sigma})$) $\nu_s(\underline{\sigma})$-распределения. Другими словами, через каждую точку $A_0 \in V_m$ проходит по одной поверхности каждого из семейств. Многообразие элементов π-структуры, касательных к этим поверхностям (V_r, V_s), образует голономную композицию, а интегральные многообразия голономной композиции — композицию А. П. Нордена [19]. Учитывая эту связь, Р. Ф. Домбровский [15] вводит для неинтегрируемых (интегрируемых) π-структур названия неголономной (голономной) композиции А. П. Нордена.

Определение. *Неголономной композицией А. П. Нордена* на дифференцируемом многообразии X_m называется дифференциально-геометрическая структура, индуцированная парой полей геометрических объектов, порождающих два распределения плоскостных элементов Λ_r и ν_s (в общем случае не инволютивных) таких, что в каждой точке $x \in X_m : [\Lambda_r, \nu_s] = T_x$, $\Lambda_r \cap \nu_s = x$. Распределения Λ_r и ν_s называются *базовыми распределениями неголономной композиции* (Λ, ν).

Из результатов исследований (§ 3, п. 2) и теоремы 4 следует

Теорема 5. *Регулярная гиперполоса* $H_{m,r}(\Lambda)$ *внутренним инвариантным образом порождает в поле касательных плоскостей* T_m *базисной поверхности* V_m *однопараметрический пучок неголономных композиций А. П. Нордена* $(\Lambda,\ \nu(\sigma))$, *базовыми распределениями каждой из которых являются распределения* Λ*-плоскостей и* $\nu_s(\underline{\sigma})$*-плоскостей. Обращение тензоров неголономности* r^{ε}_{pq} *и* $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ *соответствующих базовых распределений данной* π*-структуры* $(\Lambda,\ \nu(\underline{\sigma}))$ *в нуль есть необходимое и достаточное условие, чтобы базисная поверхность* V_m *гиперполосы* $H_{m,r}(\Lambda)$ *представляла собой голономную композицию А. П. Нордена* $(V_r, V_s(\underline{\sigma}))$, *а соответствующая* π*-структура* $(\Lambda,\ \nu(\underline{\sigma}))$ *была голономной.*

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып. 8. С. 197—272.

2. *Малаховский В. С.* К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Изв. вузов. Матем., 1972. № 9. С. 54—65.

3. *Домбровский Р. Ф.* К геометрии касательно оснащенных поверхностей в P_n // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 171—188.

4. *Попов Ю. И.* О голономности $H(M(\Lambda))$-распределения // ДГМФ. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 71—77.

5. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Калининград, 1990. 181 с. Деп. в ВИНИТИ 05.11.90, № 5625-В90Деп.

6. *Попов Ю. И.* Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. Калининград, 1970. Вып. 1. С. 27—46.

7. *Попов Ю. И.* Вырожденные гиперполосы многомерного проективного пространства // Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975. С. 195—196.

8. *Попов Ю. И.* Внутреннее оснащение вырожденной m-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства // ДГМФ. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 102—142.

9. *Попов Ю. И.* Инвариантные пространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. Калининград, 1984. 93 с. Деп. в ВИНИТИ 02.07.84, №4481-84Деп.

10. *Попов Ю. И.* Инвариантные пространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением // Тез. докл. VI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984. С. 96—97.

11. *Остиану Н. М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 239—263.

12. *Домбровский Р. Ф.* Поля геометрических объектов на многомерных касательно оснащенных поверхностях в P_n // Проблемы геометрии. 1975. Т. 7. С. 153—171.

13. *Попов Ю. И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. IV. Калининград, 1986. 93 с. Деп. в ВИНИТИ 22.07.86, №5371-1386Деп.

14. *Домбровский Р. Ф.* О неголономных композициях на поверхностях $M_{n,r}$ в P_n // Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского» : тез. докл. М., 1976. Т. 7. С. 69.

15. *Legrand G.* T-structures homogenes // Comptes Rendus Acad. Sci. 1964. Vol. 258, №19. P. 4648—4650.

16. *Широков А. П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ. 1974. Т. 2. С. 153—207.

17. *Норден А. П.* Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. 1978. Т. 10. С. 117—145.

Yu. I. Popov[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-10

Fields of geometric objects associated with compiled hyperplane $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution in affine space

Submitted on May 11, 2021

In the first-order frame a tangentially *r*-framed hyperband is given in the projective space. For simplicity of presentation, we adapt the frame by

the field of the 1st kind normals. The tensor of nonholonomicity of clothing Λ-planes field is introduced. The vanishing the nonholonomic tensor leads to three different interpretations of the hyperband. With the help of $T\Lambda$-virtual normals of the 1st and 2nd kind of framed Λ-planes, we come to the following conclusion: in a third order differential neighborhood the bundle of the hyperband second kind normals generates a one-parameter bundle of $T\Lambda$-virtual first and second kind normals, which correspond to each other in bijection. We consider focal images associated with the hyperband, with the help of which the Norden — Timofeev plane of the indicated hyperband is constructed. The geometric interpretation of the object defining the Norden — Timofeev surface was found by R. F. Dombrovsky for tangentially r-framed surfaces in the projective space. We note that the field of $T\Lambda$-virtual first kind normals induces the field of the Norden — Timofeev planes, this is the field of the 2nd kind regular hyperband normals. It is proved that with each the 1st kind $T\Lambda$-virtual normal is induced a bundle of Cartan planes in the 1st kind normal at a fixed point of the hyperband.

In conclusion, we consider the π-structures of the tangent planes field at the base surface of the hyperband.

Keywords: tangentially r-framed hyperband, nonholonomic tensor, $T\Lambda$-virtual normal, algebraic variety, focal manifold, Norden — Timofeev plane, affinor, nonholonomic Norden composition.

References

1. *Vagner, V. V.:* The field theory of local hyperbands. *Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis*, **8**, 197—272 (1950).

2. *Malakhovsky, V. S.:* On the geometry of relatively equipped submanifolds. *Izvestiya Vuzov. Math.*, **9**, 54—65 (1972).

3. *Dombrovsky, R. F.:* On the geometry of tangentially equipped surfaces in P_n. *Tr. Geom. Sem.*, **6**, 171—188 (1974).

4. *Popov, Yu. I.:* On the holonomicity of the H(M (Λ))-distribution. *DGMF*. Kaliningrad. **15**, 71—77 (1984).

5. *Popov, Yu. I.:* Fundamentals of the theory of three-component distributions in projective space. Kaliningrad, 181 p. Dep. VINITI 5.11.90, No. 5625-V90Dep (1990).

6. *Popov, Yu. I.:* Introduction of an invariant framing on the degenerate hyperband Γ_m of the multidimensional projective space P_n. *DGMF*. Kaliningrad. **1**, 27—46 (1970).

7. *Popov, Yu. I.:* Degenerate hyperbundle of multidimensional projective space. *Tez. dokl. 6th Union. conf. on modern probl. geom*. Vilnius. 195—196 (1975).

8. *Popov, Yu. I.:* The interior equipment of a degenerate *m*-dimensional hyperband of rank r in a multidimensional projective space. *DGMF*. Kaliningrad. **6**, 102—142 (1975).

9. *Popov, Yu. I.:* Invariant spaces associated with H(M(Λ))-distribution of projective space. Kaliningrad, 93 p. Dep. VINITI 2.07.84, No. 4481-84Dep (1984).

10. *Popov, Yu. I.:* Invariant spaces associated with the H(M(Λ))-distribution. *Tez. docl. VI Baltic Geometric Conference*. Tallinn. 96—97 (1984).

11. *Ostianu, N. M.:* Geometry of a multi-dimensional surface in a projective space. *Tr. Geom. Sem*. **1**, 239—263 (1966).

12. *Dombrovsky, R. F.:* Fields of geometric objects on multidimensional tangentially framed surfaces in P_n. *Problems of Geometry*, **7**, 153—171 (1975).

13. *Popov, Yu. I.:* Invariant subspaces associated with H(M(Λ))-distribution of the projective space. IV. Kaliningrad, 93 p. Dep. VINITI 07.22.86, No. 5371-1386Dep (1986).

14. *Dombrovsky, R. F.:* On nonholonomic compositions on surfaces $M_{n,r}$ in P_n. *Tez. Dokl. Vses. scientific. conf. by neevklead. geom. “150 years of Lobachevsky's geometry*”. Moscow. **7**, 69 (1976).

15. *Legrand, G.:* T-structures homogenes. *C. r. Acad. Sci.* **258**:19, 4648—4650 (1964).

16. *Shirokov, A. P.:* Structures on differentiable manifolds. *Algebra. Topol. Geom.*, **2**, 153—207 (1974).

17. *Norden, A. P.:* The theory of compositions. *Probl. Geom.*, **10**, 117—145 (1978).