УДК 517.4

М. В. Кретов, В. Н. Лейцин, В. С. Малаховский, В. И. Семёнов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОНУСАМИ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Доказано, что среднее значение почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве является внутренней точкой телесного конуса.

It is proved that mean value of almost periodic function with values in Banach space is an internal point of a solid cone.

Ключевые слова: почти периодическая функция, банахово пространство, телесный конус, замкнутое множество, выпуклое множество, конусный отрезок, почти период.

Key words: almost periodic function, Banach space, solid cone, closed set, convex set, conical segment, almost period.

Определение 1. Пусть дано банахово пространство E с нулевым элементом θ. Множество K из пространства E называется *конусом*, если:

1) K замкнуто [2];

2) K выпукло, то есть если $x, y \in K$, то $\alpha x + \beta y \in K$, где α, β — действительные числа, причем α + β = 1, α ⩾ 0, β ⩾ 0;

3) если $x \in K$, то $-x \notin K$ при $x \neq \theta$;

4) если $x \in K$, то $\alpha x \in K$, где действительное число $\alpha \geqslant 0$.

Определение 2. Конус K называется *телесным* [1], если он содержит хотя бы одну внутреннюю точку [2].

Определение 3. Множество элементов $x \in E$, удовлетворяющих неравенству $x_0 \leqslant x \leqslant y_0$, называется *конусным отрезком* и обозначается $\langle x_0, y_0 \rangle$.

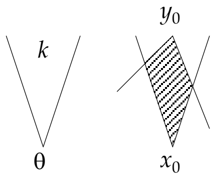

Рис. Конусный отрезок

Геометрически конусный отрезок можно изобразить на рисунке как два пересекающихся конуса. На рисунке конусный отрезок показан заштрихованным множеством.

Теорема (см. [3]). *Пусть множество значений почти периодической функции f со значениями в банаховом пространстве E принадлежит телесному конусу K, а значение функции* $u_0 = f(x_0)$ *— внутренняя точка конуса. Тогда среднее значение функции f — внутренняя точка конуса K.*

Доказательство. Так как функция f равномерно непрерывна в области определения, то можно выбрать такое число δ, зависящее от элемента u_0, что для любых чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет иметь место двойное неравенство $(-1/3)u_0 \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (1/3)u_0$.

Обозначим через l наибольшее расстояние между двумя $r/3$ почти периодами функции f, где r — радиус шарика с центром в точке u_0, полностью входящего в конус K. Тогда в любом интервале длины l найдется такое число τ, что верно неравенство $\|f(x+\tau) - f(x)\|_E < r/3$.

Согласно известным фактам [4] справедливо неравенство

$$-\frac{\|f(x+\tau) - f(x)\|_E}{r} u_0 \leqslant f(x+\tau) - f(x) \leqslant \frac{\|f(x+\tau) - f(x)\|_E}{r} u_0,$$

значит, $(-1/3)u_0 \leqslant f(x+\tau) - f(x) \leqslant (1/3)u_0$.

Покажем, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + l + 2\delta)$ длины $L = l + 2\delta$, где a — произвольное действительное число, имеется подынтервал длины 2δ, во всех точках которого $f(x) \geqslant (1/3)u_0$.

Пусть τ есть $r/3$ почти период функции f, заключенный в интервале $(\alpha + \delta - x_0, \alpha + l + \delta - x_0)$. Тогда число $x_0 + \tau$ принадлежит интервалу $(\alpha + \delta, \alpha + \delta + l)$. Если выполняется неравенство $|x - x_0| \leqslant \delta$, то число x + τ пробегает интервал длины 2δ, причем

$$f(x+\tau) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) + (f(x+\tau) - f(x)) \geqslant u_0 - \frac{1}{3}u_0 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{1}{3}u_0,$$

поэтому

$$\frac{1}{nL}\int_0^{nL} f(x)\,dx = \frac{1}{nL}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)L}^{kL} f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{nL}\cdot n \cdot \frac{1}{3}u_0 \cdot 2\delta = \frac{2\delta}{3L}u_0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что среднее значение $M\{f(x)\} \geqslant \frac{2\delta}{3L} u_0 \geqslant \theta$. Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Опойцев В. И., Хуродзе Т. А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси, 1984.

2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.

3. *Кретов М. В.* О приближении почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 4. С. 148—150.

4. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., 1962.

Об авторах

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: kretov20062006@yandex.ru

Владимир Ноянович Лейцин — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: leitsin@mail.ru

Владислав Степанович Малаховский — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: nikolaymal@mail.ru

Владимир Иосифович Семёнов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: visemenov@rambler.ru

Authors

Dr Michail Kretov — assistant professor, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: kretov20062006@yandex.ru

Professor Vladimir Leitsin — I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: leitsin@mail.ru

Professor Vladislav Malakhovsky — I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: nikolaymal@mail.ru

Professor Vladimir Semenov — I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: visemenov@rambler.ru