УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОСНАЩЕННЫХ КОНИК В A_3, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КВАДРИКЕ

Е.А. Щ е р б а к

(Калининградский государственный университет)

В трёхмерном аффинном пространстве A_3 продолжаются начатые в работе [1] исследования конгруэнций P оснащенных коник $F = \{F_1, F_2\}$ при условии, что точка F_2 описывает квадрику Q, которой принадлежат все коники F_1 конгруэнции (F_1). Доказано необходимое и достаточное условие того, что координатная плоскость $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_к)$ ($к = 2, 3$) является касательной плоскостью к поверхности (A) центров коник F_1. Рассмотрен подкласс P^1 конгруэнций P, обладающий интересными геометрическими свойствами.

1. Конгруэнции P. Отнесём конгруэнцию P к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), начало A которого совместим с центром коники F_1, конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ - с точкой F_2, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ ($i = 1, 2$) расположим на конике F_1 так, чтобы векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ были сопряжены относительно коники F_1, а вектор $\bar{e}_2$ был параллелен касательной плоскости γ к квадрике Q в точке F_2.

Относительно построенного репера R уравнения коники F_1, квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции P имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0; \tag{1}$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2ax^1x^3 + (1-2b)(x^3)^2 + 2bx^3 - 1 = 0; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
da = a(\omega_1^1 + \omega_3^3) + \omega_3^1 + (1-2b)\omega_1^3 + 2ab\omega^3, \\
db = -a\omega_3^1 + (2b-1)(\omega_3^3 + b\omega^3), \\
\omega_1^1 + a\omega_1^3 + \omega^3 = 0, \;\; \omega_2^2 + b\omega^3 = 0, \;\; \omega_2^1 + \omega_1^2 + a\omega_2^3 = 0, \\
a\omega_2^1 + \omega_3^2 + (1-2b)\omega_2^3 = 0, \;\; a(\omega_3^1 + \omega^1) + (1-b)(\omega^3 + \omega_3^3) = 0, \\
\omega^2 + b\omega_2^3 = 0, \quad \omega^1 + a\omega^3 + b\omega_1^3 = 0, \\
\omega_1^3 = \mu_i\omega_3^i, \;\; \omega_2^3 = \eta_i\omega_3^i, \;\; \omega^3 = \nu_i\omega_3^i,
\end{gathered} \tag{3}$$

где главные формы Пфаффа ω_3^1 и ω_3^2 приняты за независимые формы конгруэнции P, тем самым исключен из рассмотрения случай вырождения индикатрисы вектора $\bar{e}_3$ в линию.

Анализируя систему (3), убеждаемся, что конгруэнции P существуют и определяются с произволом трёх функций двух аргументов.

Теорема. Плоскость (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_к$) тогда и только тогда является касательной плоскостью к поверхности (A) центров A коники F_1, когда касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_l$) ($к \neq l$; $к, l = 2, 3$).

Доказательство. Рассмотрим поверхность (A). Так как $d\bar{A} = \omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$, то касательная плоскость к поверхности (A) в точке A тогда и только тогда параллельна плоскости (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_к$), когда

$$\omega^{l} = 0 \quad (к \neq l;\ к, l = 2, 3). \tag{4}$$

Для индикатрисы вектора $\bar{e}_2$ имеем $d\bar{e}_2 = \omega_2^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$ или, учитывая систему (3), получим

$$d\bar{e}_2 = \omega_2^1\bar{e}_1 - b\omega^3\bar{e}_2 - \frac{1}{b}\omega^2\bar{e}_3\ . \tag{5}$$

Здесь $b \neq 0$, в противном случае поверхность (A) вырождается в точку. Очевидно, что касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ тогда и только тогда параллельна плоскости (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_l$), когда

$$\omega^{l} = 0\ . \tag{6}$$

Сравнивая условия (5) и (6), убеждаемся в справедливости теоремы.

2. Конгруэнции P^1**.** Обозначим буквой m линию пересечения плоскостей β и γ; буквой K - точку пересечения диаметра (A, $\bar{e}_1$) коники F_1 с прямой m; $\bar{E}'_{\alpha} = \bar{A} - \bar{e}_{\alpha}$.

Определение. Конгруэнция P называется конгруэнцией P^1, если прямая AE_3 конгруэнции (AE_3) пересекает квадрику Q лишь в одной точке и точка E_1 делит пополам отрезок AK.

Аналитически, условия, выделяющие конгруэнции P^1 из конгруэнций P, записываются в виде: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$.

Принимая главные формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые формы конгруэнции P^1 , запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции P^1 в виде:

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0,\ \omega_3^1 = 0,\ \omega_2^2 = 0,\ \omega_3^3 = -\omega^1,\ \omega_2^3 = -2\omega^2,\ \omega_1^3 = -2\omega^1, \\ \omega_2^1 = -2\omega_3^2,\ \ \omega_1^2 = \omega^2 + 2\omega_3^2,\ \ \omega_1^1 = \omega^1,\ \ \omega_3^2 = \Gamma_i\omega^i. \end{gathered} \tag{7}$$

Конгруэнции P^1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Для конгруэнций P^1 легко доказываются следующие геометрические свойства:

1) прямолинейная конгруэнция (AE_1) и конгруэнция координатных плоскостей (A,$\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) тогда и только тогда односторонне аффинно расслояемы, когда

односторонне аффинно расслояемы прямолинейная конгруэнция (AE_3) и конгруэнция плоскостей (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$);

2) точка К является фокусом прямой m конгруэнции (m);

3) точка К тогда и только тогда является сдвоенным фокусом прямой m конгруэнции (m), когда поверхность (К) вырождается в линию;

4) касательная плоскость к поверхности (К) в точке К принажлежит пучку плоскостей, образованному касательной плоскостью к квадрике Q в точке E_3 и плоскостью коники F_1 ;

5) плоскость коники F_1 является касательной плоскостью поверхности (А) центров А этой коники;

6) индикатриса вектора $\bar{e}_3$ расположена на конической поверхности;

7) касательная к координатной линии ω^2=0 на поверхности Q в точке E_3 параллельна касательной к соответствующей линии на поверхности (E_1) в точке E_1;

8) касательная плоскость к поверхности (E_1') в точке E_1' параллельна плоскости (A, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$);

9) на поверхностях (E_2), (E_2') касательные к координатной линии ω^2=0 соответственно в точках E_2, E_2' параллельны вектору $\bar{e}_1$;

10) центр А коники F_1 является фокусом прямых AE_1 и AE_2 соответствующих конгруэнций.

Докажем, например, свойства 1, 3.

1. Условия односторонних аффинных расслоений от прямолинейной конгруэнции (AE_1) к конгруэнции плоскостей (A,$\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) и от прямолинейной конгруэнции (AE_3) к конгруэнции плоскостей (A,$\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) имеют соответственно вид:

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \;\; \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0 \; ; \tag{8}$$

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \;\; \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0 \; . \tag{9}$$

Условия (8) и (9) с учетом системы (7) приводятся к одному и тому же виду: Γ_1 =0.

3. Фокусы M^1, M^2 прямой m конгруэнции (m) определяются формулами:

$$\overline{M}^1 = \overline{A} + 2\bar{e}_1, \;\; \overline{M}^2 = \overline{A} + 2\bar{e}_1 + \frac{3+4\Gamma_2}{2\Gamma_1}\bar{e}_2 . \tag{10}$$

Точка К тогда и только тогда является сдвоенным фокусом прямой m конгруэнции (m), когда

$$\Gamma_2 = -\frac{3}{4}. \tag{11}$$

Касательная плоскость к поверхности (К) определяется точкой К и векторами

$$\overline{K}_1 = 3\bar{e}_1 + 4\Gamma_1\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3, \;\; \overline{K}_2 = (3+4\Gamma_2)\bar{e}_2 \; .$$

Поверхность (К) тогда и только тогда вырождается в линию, когда векторы $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ коллинеарны, т. е. когда выполняется условие (11).

Библиографический список

1. Хляпова Е.А. О парах конгруэнций фигур, порождённых центральной коникой и точкой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1975. Вып.6. С.212-221.

E. A. S c h e r b a k

ON CONGRUENCES OF EQUIPPED CONICS IN A_3
BELONGING TO A QUADRIC

Congruences P of equipped conics $F = \{F_1, F_2\}$ are considered in a three-dimensional affine space, provided that a point F_2 describes a quadric Q, to which all conics F_1 of the congruence $\{F_1\}$ belong. Necessary and sufficient conditions are proved that the coordinate plane $\{A, e_1, e_k\}$ (k = 2, 3) is a tangent plane to a surface A of centers of a conic F_1. Subclass P^1 of congruences P is isolated possesing interesting geometric properties.

УДК 514.75

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П. Ю р о в а

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается (n-1)-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик. Введены и геометрически охарактеризованы четыре аффинные связности на V_{n-1}. Изучаются определяемые этими связностями поля векторов и ковекторов на гиперповерхности С центров гиперквадрик $Q \in V_{n-1}$.

Данная статья является продолжением работ [1]-[3]; при этом используются обозначения и результаты последних. Индексы принимают следующие значения: $\alpha,\ldots=\overline{1,n}$ $i,\ldots=\overline{1,n-1}$.

Если начало А репера $R=\{A, e_i\}$ помещено в центр гиперквадрики $Q \in V_{n-1}$, а векторы $\overline{e_i}$ лежат на гиперплоскости T_Q, касательной к гиперповерх-