УДК 514.76

С. В. Галаев[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-7

Продолженные почти квазисасакиевы структуры

Вводится понятие почти квазисасакиева многообразия. Многообразие с почти квазисасакиевой структурой является обобщением квазисасакиева многообразия и отличается от него тем, что оно почти нормально. Сформулирован характеристический признак почти квазисасакиева многообразия. Найдены условия, при которых почти квазисасакиевы многообразия являются квазисасакиевыми многообразиями, в частности тогда и только тогда, когда первый и второй структурные эндоморфизмы коммутируют. На распределении почти контактного метрического многообразия определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Из определения продолженной структуры следует, что она является квазисасакиевой структурой лишь тогда, когда исходная структура является косимплектической с нулевым тензором кривизны Схоутена. Доказывается, что построенная продолженная почти контактная метрическая структура является структурой почти квазисасакиева многообразия тогда и только тогда, когда тензор Схоутена исходного многообразия равен нулю. Находятся соотношения между вторыми структурными эндоморфизмами исходной и продолженной структур.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, почти квазисасакиево многообразие, продолженная почти квазисасакиева структура.

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.

Введение

Квазисасакиевы структуры являются обобщающими по отношению к сасакиевым и косимплектическим структурам [7; 10; 11]. Еще более широкий класс составляют почти квазисасакиевы структуры (AQS-структуры). Начало изучению AQS-структур положено в работах [4; 9], где мы ввели понятие почти контактного кэлерова многообразия — почти нормального почти контактного метрического многообразия с замкнутой фундаментальной формой. В настоящей работе почти квазисасакиевы структуры возникают в результате уточнения понятия почти контактного кэлерова многообразия.

Многообразие Сасаки представляет собой нормальное контактное метрическое многообразие. «Нормальность» означает выполнение условия

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0\,,$$

где $N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ — тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма φ. Квазисасакиево многообразие — это нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой: $d\Omega = 0$. Фундаментальной формой структуры называется кососимметрический тензор $\Omega(X,Y) = g(X, \varphi Y)$.

Почти контактное кэлерово многообразие — это почти нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой: $d\Omega = 0$. Почти контактная структура названа нами почти нормальной структурой, если эндоморфизм φ удовлетворяет условию

$$\tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0.$$

AQS-структура — это почти контактная кэлерова структура, удовлетворяющая дополнительному условию: $d\eta(\vec{\xi}, \cdot) = 0$.

Основные результаты

Рассмотрим почти контактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$ — заданная на многообразии M почти контактная метрическая структура, где φ — тензор типа (1,1), называемый первым структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо)риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$,

2) $\eta\left(\vec{\xi}\right) = 1$,

3) $g\left(\varphi X, \varphi Y\right) = g\left(X, Y\right) - \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1)—3) получаем

4) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 5) $\eta \circ \varphi = 0$, 6) $\eta\left(X\right) = g\left(X, \vec{\xi}\right)$, $X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega\left(X, Y\right) = g\left(X, \varphi Y\right)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N_{\varphi}^{(1)} = N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где

$$N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2 [X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \text{ —}$$

тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_{\varphi}^{(1)} = N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти контактным кэлеровым многообразием, если выполняются следующие условия: $d\Omega = 0,\ \tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0.$ Многообразие, для которого выполняется условие

$$\tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

названо нами почти нормальным многообразием. Очевидно, что почти нормальное почти контактное метрическое многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство:* $PN_{\varphi}^{(1)} = \tilde{N}_{\varphi}$.

Доказательство.

$$PN_{\varphi}^{(1)}(X,Y) = P([\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2 [X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] +$$

$$+2d\eta(X,Y)\vec{\xi}) = P[\varphi X, \varphi Y] - P[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] =$$

$$= [\varphi X, \varphi Y] - \eta([\varphi X, \varphi Y])\vec{\xi} - [X,Y] + \eta([X,Y])\vec{\xi} - \varphi[\varphi X, Y] -$$

$$-\varphi[X,\varphi Y]=[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]+$$

$$+2d\eta(\varphi X,\varphi Y)\vec{\xi}=\tilde{N}_\varphi(X,Y).$$

Предложение доказано. Заметим, что из только что доказанного предложения следует соотношение

$$N_\varphi^{(1)}(X,Y)=\tilde{N}_\varphi(X,Y)+2\big(d\eta(X,Y)-d\eta(\varphi X,\varphi Y)\big)\vec{\xi}.$$

Приведем два простейших примера почти контактных кэлеровых многообразий.

Пример 1. Пусть $M=\left\{(x,y,z,u,v)\in\mathbb{R}^5 : y\neq 0\right\}$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$. Здесь:

1) $D=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\rangle$, где $\vec{e}_1=\partial_1-y\partial_5$, $\vec{e}_2=\partial_2$, $\vec{e}_3=\partial_3$, $\vec{e}_4=\partial_4$, $(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4,\partial_5)$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$,

2) $\vec{\xi}=\partial_5$,

3) $\eta=dz+ydx$,

4) $\varphi\vec{e}_1=\vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2=\vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3=-\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4=-\vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi}=0$,

5) базис $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{\xi}\right)$ состоит из ортонормированных векторов. Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие *M* не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_\varphi^{(1)}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\varphi^2[\vec{e}_1,\vec{e}_2]+[\vec{e}_3,\vec{e}_4]-\varphi[\vec{e}_3,\vec{e}_2]-\varphi[\vec{e}_1,\vec{e}_4]+$$

$$+2d\eta(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\vec{\xi}=\varphi^2\vec{\xi}-\eta(\vec{\xi})\vec{\xi}=-\vec{\xi}.$$

С другой стороны, $\tilde{N}_\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=2d\eta(\vec{e}_3,\vec{e}_4)\vec{\xi}=0.$

Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0, \quad X \in \Gamma\left(TM\right).$$

Таким образом, $\omega = d\eta$ в рассматриваемом примере является допустимым тензорном полем, к которому применима внутренняя связность ∇. При этом $\nabla\omega = 0$. Пусть, далее, ψ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega\left(X, Y\right) = g\left(\psi X, Y\right)$. Координатное представление эндоморфизма ψ выглядит следующим образом: $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$. Тем самым для случая многообразия M след квадрата эндоморфизма ψ является постоянной величиной: $tr\left(\psi^2\right) = const$.

Пример 2. В этом примере рассматривается то же самое многообразие M с той лишь разницей, что $\vec{e}_1 = \partial_1 - yz\partial_5$, $\eta = dz + yzdx$. Однако, в отличие от предыдущего случая, условие $d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0$ не выполняется. Действительно,

$$2d\eta\left(\vec{\xi}, \vec{e}_1\right) = -\eta\left(\left[\vec{\xi}, \vec{e}_1\right]\right) = y \neq 0.$$

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти квазисасакиевым многообразием (AQS-многообразием), если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0, \quad d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0.$$

Заметим, что из примера 1 следует, что существуют такие почти квазисасакиевы многообразия, для которых выполняются условия: $\nabla\omega = 0$, $tr\left(\psi^2\right) = const$. При этом равенство $\nabla\omega = 0$ эквивалентно равенству $\nabla\psi = 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура является почти квазисасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\varphi\right)Y = g\left((\psi\circ\varphi)Y, X\right)\vec{\xi} - \eta(Y)(\varphi\circ\psi)(X) -$$

$$-\eta(X)(\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi)Y.$$

Следующие предложения являются непосредственными следствиями теоремы 1.

Предложение 2. *Почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\varphi\right)Y = g(AY, X)\vec{\xi} - \eta(Y)AX, \;\; A = \varphi\circ\psi.$$

Предложение 3. *Почти квазисасакиево многообразие является квазисасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $d\eta = \varphi^* d\eta$,

2) $\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi = 0$,

3) $g(X, AY) = g(AX, Y), \;\; A = \varphi\circ\psi$.

Введем на распределении D почти контактного метрического многообразия структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ [1—3] многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D, полагая, что

$$\tilde{K}(X) = (x^\alpha, x^{n+a}),$$

где x^{n+a} — координаты допустимого вектора X в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$: $X = x^{n+a}\vec{e}_a$. Задание внутренней связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где

$\pi: D \to M$ — естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D, HD — горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями

$$\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b},$$

где $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a — коэффициенты внутренней связности.

Пусть, далее, $N\colon D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью [5; 6; 8] назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, где $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\vec{u})$, $\vec{u}_X = \vec{\varepsilon} - (NX)^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $X \in D$, $(NX)^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. Если не оговорено противное, будем считать, что $N = 0$. В этом случае $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\partial_n)$.

Формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$$

определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}).$$

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Всякому векторному полю $X \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии *M*, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт X^h, при этом $X^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда X — допустимое векторное поле: $X \in \Gamma(D)$.

Справедливость следующей теоремы вытекает из полученных выше структурных уравнений.

Теорема 2. *Пусть* ∇ *— внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена R(X,Y)Z. Тогда для всех* $X, Y \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left[X^h, Y^h\right] = [X, Y]^h - \{R(X, Y)\vec{p}\}^v,$$

$$\left[X^h, \vec{\xi}^h\right] = \left[X, \vec{\xi}\right]^h + \{P(X, \vec{p})\}^v,$$

$$\left[X^h, Y^v\right] = (\nabla_X Y)^v,$$

$$\left[X^h, \vec{\xi}^h\right] = \left[X, \vec{\xi}\right]^v.$$

Определим на распределении *D* многообразия Сасаки *M* продолженную почти контактную метрическую структуру $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X, Y),$$

$$\tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^v, Y^h) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0,$$

$$JX^h = X^v,\ JX^v = -X^h,\ J(\vec{u}) = \vec{0},\ X, Y \in \Gamma(D),\ \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h.$$

Легко проверить, что построенная выше структура действительно является почти контактной метрической структурой. Разные аспекты геометрии продолженных почти контактных метрических структур освещались в работах [6; 8].

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура* $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, *определяемая на распределении D почти контактного метрического многообразия, является AQS-структурой тогда и только тогда, когда D — распределение нулевой кривизны.*

Доказательство. Имеем

$$d\lambda\left(X^h, Y^h\right) = d\eta(X, Y), \ d\lambda\left(X^v, Y^h\right) = 0,$$

$$d\lambda\left(X^v, Y^v\right) = 0, \ d\lambda\left(Z, \vec{\xi}^h\right) = 0, \ X, Y \in \Gamma(D), \ Z \in \Gamma(TD).$$

Проверим выполнение следующего условия:

$$[JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] + 2d\eta(JX, JY)\vec{u} = 0,$$

$$X, Y \in \Gamma(TM).$$

Ограничимся случаем $X = \vec{\varepsilon}_a$, $X = \vec{\varepsilon}_b$. Имеем

$$[J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b] + J^2[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] - J[J\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] - J\left[\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b\right] +$$

$$+2d\lambda(J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b)\vec{u} = \left[\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right] + J^2\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] -$$

$$-J\left[\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b\right] - J\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] + 2d\lambda(\partial_{n+a}, \partial_{n+b})\vec{u} =$$

$$= -x^{n+d} R^c_{bad}\partial_{n+c} + \Gamma^c_{ab}\vec{\varepsilon}_c - \Gamma^c_{ab}\vec{\varepsilon}_c = -x^{n+d} R^c_{bad}\partial_{n+c}.$$

Справедливость предложения 4 проверяется непосредственно.

Предложение 4. *Пусть* ψ *— второй структурный эндоморфизм исходной структуры, а* $\tilde{\psi}$ *— второй структурный эндоморфизм продолженной AQS-структуры. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\tilde{\psi} X^h = (\psi X)^h, \ \tilde{\psi} X^v = 0, \ \tilde{\psi}\vec{u} = 0.$$

Список литературы

1. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

2. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с нулевым тензором Риччи — Схоутена // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. №4 (208). С. 10—16.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. №8. С. 42—52.

5. *Галаев С.В., Гохман А.В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28—31.

6. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

7. *Blair D.E.* The theory of Quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. Vol. 1, №4. P. 331—345.

8. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

9. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

10. *Kirichenko V.F., Rustanov A.R.* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Math. Sb. 2002. Vol. 193, №8. P. 71—100.

11. Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank $2p+1$ // J. Diff. Geom. 1971. №5. P. 317—324.

S. V. Galaev[1]

[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-7

Prolonged almost quazi-Sasakian structures

Submitted on June 30, 2021

The notion of an almost quasi-Sasakian manifold is introduced. A manifold with an almost quasi-Sasakian structure is a generalization of a quasi-Sasakian manifold; the difference is that an almost quasi-Sasakian manifold is almost normal. A characteristic criterion for an almost quasi-Sasakian manifold is formulated. Conditions are found under which almost quasi-Sasakian manifolds are quasi-Sasakian manifolds. In particular, an almost quasi-Sasakian manifold is a quasi-Sasakian manifold if and only if the first and second structure endomorphisms commute. An extended almost contact metric structure is defined on the distribution of an almost contact metric manifold. It follows from the definition of an extended structure that it is a quasi-Sasakian structure only if the original structure is cosymplectic with zero Schouten curvature tensor. It is proved that the constructed extended almost contact metric structure is the structure of an almost quasi-Sasakian manifold if and only if the Schouten tensor of the original manifold is equal to zero. Relationships are found between the second structure endomorphisms of the original and extended structures.

Keywords: almost contact metric manifold; internal connection; almost quasi-Sasakian manifold; extended almost quasi-Sasakian structure.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. *J. Math. and Mech. Tomsk State University*. **64**, 5—14 (2020).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu Manifolds with Zero Ricci-Schouten Tensor. *Bulletin of higher educational institutions. North Caucasus region*. **4** (208), 10—16 (2020).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 32—41 (2017).

4. *Galaev, S. V.:* Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, **58** (8), 35—42 (2014).

5. *Galaev, S. V., Gokhman A. V.*: Almost symplectic connections on a nonholonomic manifold. *Mathematics. Mechanics*, **3**, 28—31 (2001).

6. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics*, **4** (53):2, 13—22 (2011).

7. *Blair, D. E.:* The theory of Quasi-Sasakian structures. *J. Diff. Geom.*, **1**:4, 331—345 (1967).

8. *Galaev, S. V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii J. Math.*, **39**:1, 71—76 (2018).

9. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, **39**:1, 35—46 (2015).

10. *Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. *Math. Sb.*, **193**:8, 71—100 (2002).

11. *Tanno, S.:* Quasi-Sasakian structures of rank $2p+1$. *J. Diff. Geom.*, **5**, 317—324 (1971).