$x_{i+1}^{q} + x_{i+1} \cdot \frac{1}{x_{i}^{q-1}} = x_{i}$ (for any $i = \overline{1, n-1}$), is asymptotically good and moreover it reaches the Drinfeld - Vlăduţ bound over the field $\mathbb{F}_{q^2}$.

УДК 514.76

СВОЙСТВО ВЗАИМНОСТИ ПОВОРОТНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.В. В и н н и к

(Одесский государственный университет)

Полностью исследован вопрос о взаимности поворотных диффеоморфизмов [1] двумерных римановых пространств. Доказано, что не существует нетривиальных поворотных диффеоморфизмов, обладающих свойством взаимности.

Определение 1. Диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ называем поворотным, если вследствие его каждая геодезическая кривая $\bar{\gamma}$ из риманова пространства $\overline{V}_2$ становится изопериметрической экстремалью поворота риманова пространства V_2.

Определение 2. Поворотный диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ обладает свойством взаимности, если обратный диффеоморфизм ρ^{-1}: $V_2 \to \overline{V}_2$ является поворотным.

Рассмотрим двумерные римановы пространства V_2, $\overline{V}_2$ с метрическими тензорами g и $\bar{g}$ соответственно. Пусть $g_{ij}(x^1,x^2)$ (i,j=1,2) - компоненты g в некоторой локальной карте. Для кривой $\gamma:(t_0,t_1) \to V_2$ с параметрическими уравнениями $x^h=x^h(t)$ построим векторы $\xi^h = \frac{dx^h}{dt}$, $\xi_1^h = \nabla_t \xi^h$, $\xi_2^h = \nabla_t \xi_1^h$. Здесь ∇_t - оператор ковариантного дифференцирования вдоль γ относительно метрической связности.

Определение 3. Кривые, которые являются решениями вариационной изопериметрической задачи extrem $\theta[\gamma]$,$s[\gamma]$=const с закрепленными концами, будем называть изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП).

В работах [1-5] показано, что кривая риманова пространства является нетривиальной ИЭП с постоянной $\bar{c}$ только тогда, когда вдоль нее гауссова кривизна пространства не равна нулю и пропорциональна с этой постоянной кривизне кривой:

$$K(x(s)) = \bar{c}\, k(s), \tag{1}$$

K - гауссова кривизна, k - кривизна γ, s - длина дуги.

Обозначим

$$s[\gamma] = \int \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}\, dt \quad \theta[\gamma] = \int k(s) ds$$

функционалы длины и поворота кривой. Если $V_2 \subset E_3$, то k - геодезическая кривизна кривой. Геодезические кривые условимся называть тривиальными экстремалями поворота (вдоль них $\theta=0$, $\xi^h_1(t)=0$).

2. Установим диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ и потребуем, чтобы он являлся поворотным. Выясним, обладает ли ρ свойством взаимности. Пусть $\overline{\nabla}$, ∇ - метрические связности на $\overline{V}_2$, V_2 и $\overline{\Gamma}^h_{ij}$, Γ^h_{ij} - соответствующие кристоффели, построенные из метрических тензоров $\bar{g}_{ij}, g_{ij}$ в данной локальной карте. Обозначим через

$$P^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \overline{\Gamma}^h_{ij} \tag{2}$$

- тензор афинной деформации, порождённой ρ. Рассмотрим систему уравнений:

$$\overline{P}^h_{ij} = -P^h_{ij}, \tag{3}$$

$$P^h_{ij} = \lambda_i \delta^h_j + \lambda_j \delta^h_i + \psi^h g_{ij}, \tag{4}$$

$$\nabla_j \psi_i = \psi_i\left(\psi_j + \frac{K_j}{K}\right) + K(Ae^{\psi}+1) g_{ij}, \tag{5}$$

$$\overline{P}^h_{ij} = \overline{\lambda}_i \delta^h_j + \overline{\lambda}_j \delta^h_i + \overline{\psi}^h \overline{g}_{ij}, \tag{6}$$

$$\overline{\nabla}_j \overline{\psi}_i = \overline{\psi}_i\left(\overline{\psi}_j + \frac{\overline{K}_j}{\overline{K}}\right) + \overline{K}(\overline{A}e^{\overline{\psi}} + 1)\overline{g}_{ij}, \tag{7}$$

где $\psi^h = -\varphi^h - 2\lambda^h$, $\varphi(x,\xi)$ – функции точек области касательного расслоения , величины λ_i представляют компоненты ковектора. Уравнения (4),(5) представляют собой основные уравнения поворотных диффеоморфизмов [6].

Тензоры Римана пространств $\overline{V}_2$ и V_2 ($R^h_{ij\,k}$,$\overline{R}^h_{ij\,k}$) вследствие ρ связаны между собой соотношением:

$$R^h_{ijk} = \overline{R}^h_{ijk} + P^h_{ij,k} - P^h_{ik,j} + 3P^h_{aj}P^a_{ik} - 3P^h_{ak}P^a_{ij}. \tag{8}$$

Вследствие уравнений (4),(5) и того, что в двумерных римановых пространствах тензор кривизны имеет специальный вид:

$$R^h_{ij\,k} = K(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}),$$

(8) принимает вид:

$$\overline{K}\overline{g}_{ij} + \lambda_{i,\,j} + 3\lambda_i\lambda_j - g_{ij}\left(-2\Delta_1\psi + \psi^a\frac{K_a}{K} + (3\lambda_j\psi_i - 2\psi_i\psi_j)\right) = 0, \tag{9}$$

где $\Delta_1\psi = \psi_i\psi^i$- первый дифференциальный параметр Бельтрами. Из (9) имеем $\lambda_k\psi_j = \lambda_j\psi_k$, если $\psi_j=0$, то

$$\lambda_j = \alpha\psi_j. \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$\alpha_j\psi_i = \alpha_i\psi_j. \tag{11}$$

Подставляем (11) в (9) , выполняем необходимые преобразования и получаем выражение $\bar{g}_{ij}$ через g_{ij} :

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{\bar{k}}\left[g_{ij}(-2\Delta_1\psi + K(Ae^{\psi}+2) - \alpha K(Ae^{\psi}+1)) + +\psi_i\psi_j(-3\alpha^2 - 4\alpha + 2 - \beta)\right]. \tag{12}$$

Затем возвращаем $\bar{g}_{ij}$ в преобразованную формулу (9) и после некоторого числа элементарных преобразований :

$$\psi_i g_{kj} B+\psi_k g_{ij} C+\psi_j g_{ik} D+\psi_i\psi_j\psi_k E+\psi_i\psi_j\beta_k=0, \qquad (13)$$

где E-const, B,C,D-функции от ψ. Из (13) следует, что:

1) B=D , либо 2) $\psi_i g_{kj}=\psi_j g_{ki}$, ψ=const.

Исследуем (13) в случае 1), тогда проальтернировав (13) по i,j и домножив на ψ^k, получим :

$$(B-C)(\psi_j g_{ik}-\psi_k g_{ij})+\psi_i\psi_j\beta_k-\psi_i\psi_k\beta_j=0, \qquad (14)$$

$$(B-C)(\psi_i\psi_j-\Delta_1\psi g_{ij})+\psi^k\psi_i\psi_j\beta_k-\Delta_1\psi\psi_i\beta_j=0. \qquad (15)$$

Проальтернируем (15) по i,j, тогда :

$$\psi_i\beta_j=\psi_j\beta_i\ ,\ \beta_i=\gamma\psi_i\ ,\ \gamma=\text{const}.$$

Возвращая β_i в (14), получаем:

$$\Delta_1\psi g_{ij}=\psi_i\psi_j. \qquad (16)$$

Так как метрика g-невырожденна, то ψ=const. Итак, доказана

Теорема. Поворотный диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ обладает свойством взаимности тогда и только тогда, когда ρ является тривиальным поворотным диффеоморфизмом, т. е. геодезическим.

Библиографический список

1. *Лейко С. Г.* Поворотные отображения римановых пространств и их приложения // Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Всесоюз. школа. Кемерово, 1986.
2. *Лейко С. Г.* Теорема существования экстремалей поворота на поверхностях в E_3 и поворотные диффеоморфизмы // Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Всесоюз. школа. Кемерово, 1988.
3. *Лейко С. Г.* Законы сохранения для спин-траекторий, порождённых ИЭП // Гравитация и теория относительности. Вып.26. Казань, 1988. С.117-124.
4. *Лейко С. Г.* Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидова пространства // Доклады РАН. 1995. Т.344. № 2. С.162-164.
5. *Лейко С. Г.* Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств // Изв. вузов. Мат. 1992. №2. С.62-71.
6. *Лейко С. Г.* Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства // Мат. зам. Т.47. Вып. 3. 1990.
7. *Дубровин Б. А. и др.* Современная геометрия М.: Наука, 1986. 759 с.

A.V. V I N N I K

THE PROPERTY OF RECIPROCITY OF ROTARY DIFFEOMORPHISMS OF TWO DIMENTIONAL RIEMANNIAN SPACES

In this article the question about reciprocity of rotary diffeomorphisms [1] of two - dimensional Riemannian spaces has been completely investigated. These diffeomorphisms are characterized by that it transfer the geodesic curves onto the isoperimetric

extremals of rotation (I.E.R) (along I.E.R. geodesic curvature is proportional to Gaussian curvature). It has been proved that only trivial rotary diffeomorphisms (geodesic diffeomorphisms) have a property of reciprocity.

УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m

С.Ю.В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

Продолжается изучение регулярных касательно (r,l)-оснащенных гиперполос SH_m [1]. Показано, что в дифференциальной окрестности 2-го порядка регулярная гиперполоса SH_m индуцирует проективное пространство $\overline{P}_n(V_m)$, двойственное исходному $P_n(V_m)$ относительно некоторого инволютивного преобразования J, порождаемого гиперполосой SH_m. Введен в рассмотрение двойственный образ гиперполосы SH_m относительно преобразования J-нормально (l,r)-кооснащенная гиперполоса $\overline{SH}_m$. Дано задание гиперполосы $\overline{SH}_m$ и описана ее геометрическая структура.

Во всей работе используются обозначения работ [1], [2], а также следующая схема индексов:

$$J,K,L,...=\overline{1,n};\ p,q,r,s,t,...=\overline{1,r};\ i,j,k,l,...=\overline{r+1,m};\ \bar{J},\bar{K}=\overline{0,n};$$
$$\alpha,\beta,\gamma,...=\overline{m+1,n-1};\ \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n};\ u,v,w,...=\overline{r+1,n-1};$$
$$\hat{u},\hat{v},\hat{w},\ldots=\overline{r+1,n};\ \hat{A},\hat{B},\hat{C}=\overline{1,r},\ \overline{m+1,n};\ a,b,c=\overline{1,m},\ n.$$

1. Регулярная гиперполоса H_m называется касательно (r,l)-оснащенной, если ее базисная поверхность V_m несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ,L) распределений касательных r-плоскостей $\Lambda=\Lambda(A)$ и касательных l-плоскостей $L=L(A)(r+l=m)$ [1] таких, что в каждой точке $A\in V_m$:

$$[\Lambda,L]=T_m,\ \Lambda(A)\cap L(A)=A, \tag{1.1}$$

где T_m - касательная гиперплоскость к V_m в точке A. Такие гиперполосы будем обозначать SH_m. Известно [1], что в репере 1-го порядка $R^1=\{A_J\}$ гиперполоса SH_m задается уравнениями (соответствующие замыкания не выписываются):

$$\begin{cases} \omega_o^\alpha=0,\ \ \omega_\alpha^n=0,\ \ \omega_p^n=\Lambda_{pq}^n\omega^q,\ \ \omega_i^n=L_{ij}^n\omega^j, \\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pq}^\alpha\omega^q,\ \ \omega_i^\alpha=L_{ij}^\alpha\omega^j,\ \ \omega_p^i=\Lambda_{pb}^i\omega^b, \\ \omega_i^p=L_{ib}^p\omega^b,\ \ \omega_\alpha^p=N_{\alpha q}^p\omega^q,\ \ \omega_\alpha^i=N_{\alpha j}^i\omega^j. \end{cases} \tag{1.2}$$

где