ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I5 1984

УДК 514.75

В.П.Т о л с т о п я т о в

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ.

Решается вопрос о задании векторного поля с помощью поля аффинора; рассматриваются линейные отображения, возникающие в связи с заданием над подмногообразии векторного поля.

I. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана p-поверхность V_p. Присоединим к поверхности V_p в точке x подвижной репер $R^x=(x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha)$, $i=1,\dots p; \alpha=\overline{p+1,n}$. Имеем:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i;\; d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha;\; d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^j\vec{e}_j+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

Поверхность V_p определяется системой уравнений $\omega^\alpha=0$, продолжая которую получим $\omega_i^\alpha=\ell_{ij}^\alpha\omega^j$, $\ell_{ij}^\alpha=\ell_{ji}^\alpha$.

Пусть на V_p задано векторное поле $\vec{\xi}=\xi^i\vec{e}_i$. Рассматривая условие инвариантности векторного поля

$$d\xi^i+\xi^j\omega_j^i=\mu_k^i\omega^k, \qquad (2)$$

замечаем, что вместе с векторным полем ξ на V_p определяется поле аффинора μ_k^i. Возникает вопрос, в какой мере поле векторов определяется заданием поля аффинора μ_k^i. В естественном репере $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ условие инвариантности векторного поля принимает вид:

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}=-\Gamma_{jk}^i\xi^j+\mu_k^i, \qquad (3)$$

где Γ_{jk}^i – коэффициенты римановой связности в репере $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Таким образом, поле аффинора μ_k^i на V_p определяет поле векторов тогда и только тогда, когда интегрируема система (3) уравнений в частных производных. Можно показать, что система (3) интегрируема, если совместна система уравнений

$$\tfrac{1}{2}\xi^t R_{tsk}^i+\mu_{[k,s]}^i+\mu_{[k}^j\Gamma_{s]j}^i=0. \qquad (4)$$

А именно, если система (4) совместна, то координаты векторного поля в естественном репере будут выражаться через фундаментальную систему решений этой системы.

Т е о р е м а 1. Если поле аффинора определяет на подмногообразии векторное поле, то оно определяет его однозначно тогда и только тогда, когда на подмногообразии нельзя определить поле параллельных векторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для векторных полей $\vec{\xi}$ и $\vec{z}$ имеем $d\xi^i+\xi^j\omega_j^i=\mu_k^i\omega^k$, $dz^i+z^j\omega_j^i=\mu_k^i\omega^k$, то $d(\xi^i-z^i)+(\xi^j-z^j)\omega_j^i=0$, $(\vec{\xi}-\vec{z})$ – поле параллельных векторов. Обратно, если на V_p существует поле параллельных векторов $\vec{v}$ и если для поля $\vec{\xi}$ условие инвариантности записывается с помощью аффинора μ_k^i, то и для поля $\vec{\xi}+\lambda\vec{v}$, $\lambda=const$ условие инвариантности запишется с помощью аффинора μ_k^i.

Как показал Л.П.Эйзенхарт [1], риманово многообразие V_p допускает поле параллельных векторов тогда и только тогда, когда его основная форма может быть приведена к виду

$$\varphi=(\omega^1)^2+\gamma_{\bar{\tau}\bar{s}}\,\omega^{\bar{\tau}}\omega^{\bar{s}},\quad \bar{\tau},\bar{s}=2,\dots,p,$$

где функции $\gamma_{\bar{\tau}\bar{s}}$ не меняются вдоль линии ω^1.

II. Матрица $\mu_k^i(x)$ определяет линейное преобразование $f_T(x)$ касательного пространства $T_x(V_p)$. Обозначим $p_1=\dim \operatorname{Im} f_T(x)$ – ранг линейного преобразования, $p_2=\dim \operatorname{Ker} f_T(x)$ – дефект линейного преобразования, $p_1+p_2=p$.

Пусть $\vec{\ell}\in \operatorname{Ker} f_T(x)$, тогда при дифференцировании в направлении $\vec{\ell}$ $(\omega^i=\theta\ell^i)$ имеем из (2): $d\xi^i+\xi^j\omega_j^i|_{\omega^i=\theta\ell^i}=\theta\mu_k^i\ell^k=0$ или $\nabla_{\vec{\ell}}\vec{\xi}=0$. То есть поле $\vec{\xi}$ переносится параллельно в направлении $\vec{\ell}$. Таким образом, ядро линейного преобразования $f_T(x)$ определяет в $T_x(V_p)$ p_2-подпространство, по которому поле $\vec{\xi}$ переносится параллельно. Если $\vec{\xi}\in \operatorname{Ker} f_T(x)$, $\forall x\in V_p$, то $\vec{\xi}$ – геодезическое векторное поле.

Если $\vec{\xi}$ принадлежит инвариантному подпространству преобразования $f_T(x)$, $\forall x\in V_p$, то при дифференцировании в направлении $\vec{\xi}$ $(\omega^i=\theta\xi^i)$ имеем $d\xi^i+\xi^j\omega_j^i|_{\omega^i=\theta\xi^i}=\theta\mu_k^i\xi^k=\theta\lambda\xi^i$; $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=\theta\lambda\vec{\xi}$. То есть направление поля $\vec{\xi}$ переносится параллельно по интегральным линиям этого поля.

Следы линейных операторов $f_T(x)$ во всех точках многообразия определяют инвариантное скалярное поле-дивергенцию векторного поля [2]: $div\,\vec{\xi}=\nabla_i\xi^i=\sum_i \mu^i_i$. Если $div\,\vec{\xi}=0$, то поле называется свободным от источников или соленоидальным [3]; его интегральные линии либо уходят в бесконечность, либо замкнуты.

Ротор векторного поля в n-мерном случае определяется как бивектор [2]: $\xi_{ij}=\nabla_i\xi_j-\nabla_j\xi_i=\mu^k_i\gamma_{kj}-\mu^k_j\gamma_{ki}$. Обращение в нуль ротора векторного поля есть необходимое и достаточное условие градиентности векторного поля. Таким образом, поле $\vec{\xi}$ является градиентным тогда и только тогда, когда выполнено условие [4]: $\mu^k_i\gamma_{kj}-\mu^k_j\gamma_{ki}=0$. Откуда легко следует

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы поле $\vec{\xi}$ было градиентным, необходимо и достаточно, чтобы собственные подпространства, соответствующие различным собственным значениям матрицы $\mu^i_k(x)$, $\forall x\in V_p$, были ортогональны.

Если $\forall x\in V_p$, $\mu^i_k(x)$ имеет собственное значение кратности τ, то на V_p определяется τ-распределение Δ_τ, так что $\Delta_\tau(x)$-собственное подпространство в $T_x(V_p)$, соответствующее этому собственному значению. В случае, когда распределение Δ_τ вполне интегрируемо, поле $\vec{\xi}$ является градиентным на интегральном подмногообразии $V_\tau\subset V_p$.

III. Вместе с векторным полем $\vec{\xi}$ определяется линейное отображение $f_N(x): T_p(x)\to N_{n-p}(x), \forall x\in V_p$, так что $f_N(\vec{e}_i)=b^\alpha_{ji}\xi^j\vec{e}_\alpha$. Дефект линейного отображения равен размерности направления, сопряженного направлению поля $\vec{\xi}$. При смещении в направлении $\vec{\xi}$ $(\omega^i=\theta\xi^i)$ имеем $d\vec{\xi}=\theta\mu^k_i\xi^i\vec{e}_k+\theta b^\alpha_{ij}\xi^i\xi^j\vec{e}_\alpha$. Таким образом, интегральные линии поля $\vec{\xi}$ -прямые $(d\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:
1. $b^\alpha_{ij}\xi^i\xi^j=0$, $\vec{\xi}$ -асимптотическое поле; 2. $\mu^i_k\xi^k=\frac{\lambda}{\theta}\xi^i$, $\vec{\xi}$ -принадлежит ядру $(\lambda=0)$ или инвариантному подпространству $(\lambda\neq 0)$ линейного преобразования $f_T(x)$, $\forall x\in V_p$.

Если ранг линейного отображения $f_N(x)$, $\forall x\in V_p$ равен нулю, то поле $\vec{\xi}$ сопряжено с любым направлением на поверхности.

Т е о р е м а 3. Если поле $\vec{\xi}$ сопряжено с любым направлением на поверхности, то поверхность является тангенциально вырожденной, интегральные линии поля $\vec{\xi}$ являются прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если поле $\vec{\xi}$ сопряжено с любым направлением на поверхности V_p, то

$$b^\alpha_{ij}\xi^j=0. \tag{5}$$

Система уравнений (5) имеет ненулевое решение ξ^i, следовательно, $rang\,\|b^\alpha_{ij}\|<p$, то есть ранг системы 1-форм ω^α_i меньше p, а это значит, что V_p -тангенциально вырожденная поверхность. Дифференцируя уравнения системы (5), получим

$$b^\alpha_{ji}\mu^j_k+b^\alpha_{jik}\xi^j=0. \tag{6}$$

Свертывая (6) с ξ^i, имеем $b^\alpha_{ji}\mu^j_k\xi^i+b^\alpha_{jik}\xi^i\xi^j=0$.
Откуда, в силу (5), следует $b^\alpha_{jik}\xi^j\xi^i=0$ или $b^\alpha_{jik}\xi^j\xi^k=0$.
Свертывая (6) с ξ^k, приходим к условию

$$b^\alpha_{ji}\mu^j_k\xi^k=0 \tag{7}$$

Из (5),(7) следует $b^\alpha_{ji}(\mu^j_k\xi^k-\lambda\xi^j)=0$
Среди решений этой системы линейных однородных уравнений есть и нулевое, то есть существует λ, что $\mu^j_k\xi^k=\lambda\xi^j$. А это значит, что интегральные линии поля $\vec{\xi}$ —прямые. Теорема доказана.

Если $\vec{\xi}$ -поле параллельных векторов, сопряженное с любым направлением на поверхности V_p (f_T, f_N, $\forall x\in V_p$ - одновременно вырожденные отображения), то $d\vec{\xi}=0$, $\vec{\xi}=const$. Поверхность V_p при этом является развертывающейся поверхностью.

Список литературы

1. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия.М.,1948.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.,М.,1964.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.,М.,1965.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М.,1976