УДК 514.75

М. В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ГИПЕРКВАДРИК

Вводится понятие характеристических направлений дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексом (n-параметрическим семейством) центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве по аналогии с соответствующими направлениями точечных отображений. При помощи понятий геометрического касания кривых второго порядка и инфлексионной кривой дана геометрическая характеристика введенным направлениям.

Исследуется локальное дифференцируемое отображение $f: C \in A_n \mapsto q \in R(q)$, где C — центр гиперквадрики q, отнесённой к реперу R_0, построенному в работе [1], $R(q)$ — пространство гиперквадрик q n-мерного аффинного пространства A_n. Система дифференциальных уравнений отображения f совпадает с системой дифференциальных уравнений комплекса K_n: $\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma}$ $\left(\alpha, \beta, ... = \overline{1,n}\right)$.

Известно [2], что геометрический объект $\Gamma_2 = \left\{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\right\}$ является фундаментальным объектом второго порядка отображения f.

Пусть V — многообразие в A_n, содержащее точку C. Обозначим $[V]$ конус, состоящий из прямых связки $\{C\}$, которые имеют с многообразием V не менее двух общих точек или касаются его в точке C; далее, пусть $a = f, \psi, \varphi_1, \varphi_2$, где $f, \psi, \varphi_1, \varphi_2$ — отображения, рассмотренные в работе [2], J_a — индикатриса [1] отображения a.

Определение. *Конус* $\chi_a = [J_a]$ *называется* a*-характеристическим конусом, а определяемые им направления —* a*-характеристическими направлениями.*

Пусть $L: R^1 \to A_n$ — кривая в A_n и $L(0) = C$. Зададим кривую L системой дифференциальных уравнений

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha dt, \tag{1}$$

где $t \in R^1$. Продолжая систему (1), получим:

$$\nabla\Lambda^\alpha = M^\alpha dt, \tag{2}$$

$$\nabla M^\alpha = N^\alpha dt. \tag{3}$$

В координатной форме отображения L, ψ, φ_1 и φ_2 имеют соответственно вид:

$$X^\alpha = \Lambda^\alpha t + \frac{1}{2} M^\alpha t^2 + \langle 3 \rangle, \tag{4}$$

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma + \frac{1}{2} \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\gamma X^\delta + \langle 3 \rangle, \tag{5}$$

$$a_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta} X^\beta - \Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\beta X^\gamma + \langle 3 \rangle, \tag{6}$$

$$H_\alpha = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} X^\beta + \Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\beta X^\gamma + \langle 3 \rangle, \tag{7}$$

где символ $\langle l \rangle$ означает совокупность членов порядка малости $p \ge l$ относительно приращений координат точки области определения. Отображение f будет задаваться уравнениями (5) и (6).

Уравнения касательных к отображениям ψ, φ_1 и φ_2 дробнолинейных отображений $K_\psi(P_\mu)$, $K_{\phi_1}(Q_\mu)$ и $K_{\phi_2}(S_\mu)$ имеют соответственно вид:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^{\gamma}}{1 - P_{\mu} X^{\mu}}, \qquad (8)$$

$$a_{\alpha} = -\frac{\overset{0}{a}_{\alpha\beta} X^{\beta}}{1 - Q_{\mu} X^{\mu}}, \qquad (9)$$

$$H_{\alpha} = \frac{\overset{0}{a}_{\alpha\beta} X^{\beta}}{1 - S_{\mu} X^{\mu}}, \qquad (10)$$

где тензоры P_{μ}, Q_{μ} и S_{μ} определяют гиперплоскости $H(P_{\mu})$, $H(Q_{\mu})$ и $H(S_{\mu})$, задаваемые соответственно уравнениями: $P_{\alpha} X^{\alpha} - 1 = 0$, $Q_{\mu} X^{\mu} - 1 = 0$ и $S_{\mu} X^{\mu} - 1 = 0$.

Уравнения касательных к отображению f дробнолинейных отображений $K_f(P_{\mu})$ имеют вид (8), (9) при $P_{\mu} = Q_{\mu}$, т. е. при совпадении гиперплоскостей $H(P_{\mu})$ и $H(Q_{\mu})$.

Теорема 1. *Направление, определяемое в точке C кривой L, будет a-характеристическим тогда и только тогда, когда кривые $a \circ L$ и $K_a(P_{\mu}) \circ L$ имеют в элементе $a(C)$ геометрическое касание второго порядка* [3].

Доказательство. Проведём доказательство для отображения f, так как для отображений ψ, φ_1 и φ_2 оно аналогично. Для кривых L, заданных уравнением (4), определяющих f-характеристическое направление, из уравнений алгебраического многообразия J_f [1]

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} X^{\gamma} X^{\delta} - 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^{\gamma} = 0, \qquad (11)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^{\beta} X^{\gamma} - \overset{0}{a}_{\alpha\beta} X^{\beta} = 0 \qquad (12)$$

получаем:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda^{\gamma} \Lambda^{\delta} = 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \Lambda^{\gamma} m, \qquad (13)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \Lambda^{\beta} \Lambda^{\gamma} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta} m. \qquad (14)$$

Кривые $f \circ L$ и $K_f\left(P_\mu\right) \circ L$ представляются, соответственно, в виде:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma t + \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta + M^\gamma\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\right)t^2 + \langle 3\rangle, \quad (15)$$

$$a_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta}\Lambda^\beta t - \frac{1}{2}\left(a_{\alpha\beta}M^\beta + 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma\right)t^2 + \langle 3\rangle, \quad (16)$$

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma t + \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma + 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}P_\delta\Lambda^\gamma\Lambda^\delta\right)t^2 + \langle 3\rangle, \quad (17)$$

$$a_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta}\Lambda^\beta t - \frac{1}{2}\overset{0}{a}_{\alpha\beta}\left(M^\beta + 2\Lambda^\beta P_\gamma\Lambda^\gamma\right)t^2 + \langle 3\rangle. \quad (18)$$

Эти кривые имеют касание второго порядка при условиях

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta = 2\left(P_\delta X^\delta - k\right)\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma, \quad (19)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma = \left(P_\gamma\Lambda^\gamma - k\right)\Lambda^\beta\overset{0}{a}_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

которые при $k = P_\delta\Lambda^\delta - m$ принимают соответственно вид (13) и (14). Теорема доказана.

Теорема показывает, что введённые здесь a-характеристические направления играют для отображения a такую же роль, какую в теории точечных отображений [4] играют характеристические направления.

Другим свойством введённых направлений, которое указывает на аналогию с теорией точечных отображений, является следующее. Можно показать, что f-характеристическим прямым при отображении f соответствуют одномерные многообразия гиперквадрик, у которых характеристические многообразия рангов 1 и 2 [5] совпадают.

Понятие характеристических направлений связано с понятием инфлексионной точки кривой [4]. Кривую, имеющую инфлексионную точку, будем называть кривой, инфлексионной в этой точке. При построении теории отображений пространств фигур, отличных от точки исходного пространства, возникает необходимость обобщить последнее понятие для пространств рассматриваемых фигур. В работе [6] даётся вариант такого обобщения для пространства гиперквадрик.

Определение. *Кривая* $\tilde{L}$ *в пространстве* $R(q)$ *называется инфлексионной в фиксированной гиперквадрике, если характеристические многообразия второго и первого рангов* [5] *кривой* $\tilde{L}$ *для этой гиперквадрики совпадают.*

Найдём аналитические условия, характеризующие инфлексионные кривые в $R(q)$. Кривая $\tilde{L} : R^1 \to R(q)$ задаётся системой уравнений:

$$\Delta a_\alpha = \Lambda_\alpha \theta, \ \nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}\theta, \tag{21}$$

где $\theta = dt$, $t \in R^1$, $\Delta a_\alpha = -a_{\alpha\beta}\omega^\beta$.

Продолжая систему (21) два раза, получим:

$$\Delta \Lambda_\alpha = M_\alpha \theta, \ \nabla \Lambda_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}\theta, \tag{22}$$

$$\Delta M_\alpha = N_\alpha \theta, \ \nabla M_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}\theta, \tag{23}$$

где $\Delta\Lambda_\alpha = \nabla\Lambda_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta$, $\Delta M_\alpha = \nabla M_\alpha + M_{\alpha\beta}\omega^\beta$.

Характеристическое многообразие ранга один кривой $\tilde{L}$ [5] задаётся следующей системой уравнений:

$$\Lambda_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta + 2\Lambda_\alpha X^\alpha = 0. \tag{24}$$

Система, состоящая из уравнений (24) и системы уравнений

$$M_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta + 2M_\alpha X^\alpha = 0, \tag{25}$$

задаёт характеристическое многообразие ранга два кривой $\tilde{L}$.

Для инфлексионности кривой $\tilde{L}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$M_{\alpha\beta} = k\Lambda_{\alpha\beta}, \ M_\alpha = k\Lambda_\alpha. \tag{26}$$

Условия (26) являются аналогом условий инфлексионности кривой в P_n и A_n [3].

Степенной ряд для кривой $L: t \in R^1 \to C \in A_n$ в репере R_0 имеет вид (4).

Для кривой $\widetilde{L}: t \in R^1 \to q \in R(q)$ соответствующий ряд записывается в следующем виде:

$$a_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta} t + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} t^2 + \langle 3 \rangle, \qquad (27)$$

$$a_\alpha = \Lambda_\alpha t + \frac{1}{2} M_\alpha t^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (28)$$

Так как в рассматриваемом случае существуют приведённые миноры $a^{\alpha\beta}$, то

$$a^{\alpha\beta} = \left(\overset{0}{a}\right)^{\alpha\beta} + \Lambda^{\alpha\beta} t + \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} t^2 + \langle 3 \rangle, \qquad (29)$$

где

$$\Lambda^{\alpha\beta} = -\left(\overset{0}{a}\right)^{\alpha\gamma} \left(\overset{0}{a}\right)^{\beta\delta} \Lambda_{\gamma\delta}, \qquad (30)$$

$$M^{\alpha\beta} = -\left(\overset{0}{a}\right)^{\alpha\gamma} \left(\overset{0}{a}\right)^{\beta\delta} M_{\gamma\delta} + 2\left(\overset{0}{a}\right)^{\alpha\gamma} \left(\overset{0}{a}\right)^{\beta\delta} \left(\overset{0}{a}\right)^{\varepsilon\zeta} \Lambda_{\zeta\delta} \Lambda_{\gamma\varepsilon}. \qquad (31)$$

Из формул (26), (28) и (29) следует, что

$$\Lambda_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta} \Lambda^\beta, \qquad (32)$$

$$M_\alpha = -\left(M^\beta + 2\Lambda_\gamma \Lambda^{\beta\gamma}\right) \overset{0}{a}_{\alpha\beta}. \qquad (33)$$

Последние соотношения дают возможность получить необходимые и достаточные условия инфлексионности кривой $\widetilde{L}$ в следующей форме:

$$M^\alpha = k\Lambda^\alpha - 2\Lambda_\beta \Lambda^{\alpha\beta}, \qquad (34)$$

$$M_{\alpha\beta} = k\Lambda_{\alpha\beta}. \qquad (35)$$

Теорема 2. *Направление, определяемое в точке* C *инфлексионной в ней кривой* $L:R^1 \to A_n$, *будет f-характеристическим в том и только том случае, если кривая* $\tilde{L} = f \circ L : R^1 \to R(q)$ *является кривой, инфлексионной в элементе* $f(C)$.

Доказательство. Пусть кривые L и $\tilde{L}$ задаются соответственно уравнениями (4) и (27), (28). Тогда из уравнений (5) и (6) получаем:

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma,\ M_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma, \tag{36}$$

$$\Lambda_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta}\Lambda^\beta,\ M_\alpha = -\overset{0}{a}_{\alpha\beta}M^\beta - \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma. \tag{37}$$

Если прямая, определяемая тензором Λ^α, лежит на f-характеристическом конусе χ_f, то имеем:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta = 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma m, \tag{38}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma = \overset{0}{a}_{\alpha\beta}\Lambda^\beta m. \tag{39}$$

В работе [7] профессором В. В. Рыжковым доказано, что для инфлексионности кривой L необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$M^\alpha = m\Lambda^\alpha. \tag{40}$$

Тогда условия (34), (35) или (26) инфлексионности кривой $\tilde{L} = f \circ L$ выполняются в том и только том случае, если справедливы соотношения (38) и (39). Теорема доказана.

Из этой теоремы также следует, что понятие f-характеристических направлений является обобщением понятия характеристических направлений точечных отображений в смысле В. В. Рыжкова [4] для отображения $f: A_n \to R(q)$.

Аналогичные построения можно провести для отображений ψ, φ_1 и φ_2.

Список литературы

1. *Кретов М. В.* О главных точках дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексом гиперквадрик // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 51— 58.

2. *Кретов М. В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве / ВИНИТИ. М., 1981.

3. *Рыжков В. В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия 63 / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65—107.

4. *Рыжков В. В.* Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. С. 235—242.

5. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. С. 113—134.

6. *Андреев Б. А.* Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q) // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 5—18.

7. *Рыжков В. В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970 / ВИНИТИ. М., 1971. С. 153—174.

M. Kretov

THE CHARACTERISTIC DIRECTIONS OF THE DIFFERENTIATED DISPLAYS, ASSOCIATED WITH COMPLEX OF HYPERQUADRICS

The concept of characteristic directions of the differentiated displays associated with a complex (n-parametrical family) of central non-degenerate hyperquadrics in affine space by analogy to corresponding directions of dot displays is entered. By means of concepts of a geometrical contact of curves of the second order and inflexional curve gives the geometrical characteristic to the entered directions.