учетом системы (7), опять приходим к неравенству (10). Зна

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0.$$

Обозначим $\omega_3^1 = \omega^1$, $\omega_3^2 = \omega^2$. Система пфаффовых и коне ных уравнений пары $\mathcal{L}_1$ приводится к виду:

$$\omega_1^2 = a\omega^2,\quad \omega_4^2 = b\omega^2,\quad 2\omega_2^1 = c\omega^1 + \omega^2,\quad \omega_4^1 = h(2\omega_2^1 - \omega_4^2),$$

$$\omega_2^3 = m\omega^1 + n\omega_4^1,\quad \omega_2 = n\omega^1 + p\omega_4^1,$$

$$\omega_1^3 = r\omega^1 + s\omega_4^1 - (m+nb)\omega^2,\quad \omega_1 = s\omega^1 + t\omega_4^1 - (n+bp)\omega^2,$$

$$\omega_3^4 = f\omega^1 + g\omega_4^1,\quad \Omega_1 = \lambda\omega_4^1 + \mu\omega^1;$$

$$\Omega_2 = u\omega^1 + f\omega_4^1 - \frac{1}{2}c\omega^2,\qquad \omega_4^3 = \mu\omega_4^1 + \xi\omega^1 - \frac{1}{2}c\omega_4^2;$$

$$r + hc(s+tb) + sb = 0,\quad u + hc(f+gb) + fb - 2a = 0,$$

$$\xi + hc(\lambda b + \mu - 2a) + \mu b = 0,$$

$$h(1-b)(rp - 2ns + tm) + (n^2 - mp)(b - hc) = 0.$$

Анализируя полученную систему уравнений, убеждаемся в спра дливости теоремы.

Аналогично, путем перехода к новому базису $\omega_4^1 = \vartheta_1$, $\omega_3^2 =$ получим систему пфаффовых и конечных уравнений пары $\mathcal{L}_2$:

$$\omega_3^1 = 0,\quad \omega_1^2 = \mu_1\vartheta_2,\quad \omega_2^1 = \frac{1}{2}(\mu_2\vartheta_1 + \omega_4^2),\quad \omega_1 = \mu_3\vartheta_1 + \mu_4\vartheta_2,$$

$$\omega_2 = \mu_5\vartheta_1,\quad \omega_1^3 = \mu_6\vartheta_2 - \mu_7\omega_1,\quad \omega_4^2 = \mu_7\vartheta_2,$$

$$\omega_2^3 = -(\mu_4 + \mu_5\mu_7)\vartheta_1 + \mu_8\vartheta_2,\qquad \omega_3^4 = \rho_1\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu_2\vartheta_2,$$

$$\Omega_1 = \rho_3\vartheta_1 - \frac{1}{2}\mu_2\omega_4^2,\qquad \Omega_2 = \rho_2\vartheta_2 - \mu_7\omega_3^4,$$

$$\omega_4^3 = \rho_4\vartheta_2 - (\rho_3\mu_7 - 2\mu_1)\vartheta_1,$$

где

$$\mu_5\mu_6 + \mu_3\mu_8 + (\mu_4)^2 = 0.$$

Из анализа системы уравнений пары $\mathcal{L}_2$ следует, что пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом одиннадцати функций одного аргумента.

УДК 514.75

$\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

И.Е.Лисицина

(Калининградский государственный университет)

В данной работе продолжается изучение теории двухсостав- го $\mathcal{H}$-распределения трехмерного проективного пространства P_3 [7]. Известно [7], что $\mathcal{H}$-распределение в P_3 – это па- распределений, состоящая из базисного распределения прямых Λ_1 (Λ_1-распределение) и оснащающего H_2-распределения оскостей (H_2-распределение) с отношением инцидентности их ответствующих элементов в общем центре L_0 следующего вида: $\in \Lambda_1(L_0) \subset H_2(L_0)$. В работе изучаются проективные связности Λ_1-подрасслоении и H_2-подрасслоении. Все исследования оводятся в специализированном репере $\mathcal{R}_2(\mathcal{H})$ [7]. Схема ис- льзования индексов такова: $\bar{J}, \bar{K}, \bar{L}, \ldots = \overline{0,3}$; $J, K, L, \ldots = \overline{1,3}$; $p, q, s, \ldots = 0,1$; $\bar{\rho}, \bar{\xi}, \bar{\sigma}, \ldots = \overline{0,2}$; $\rho, \xi, \sigma, \ldots = 1,2$; $u, v, \ldots = 2,3$.

Трехмерное проективное пространство P_3 будем трактовать к многообразие P^0-структуры [5], базой которого является ехмерное точечное пространство, слоями – трехмерные центро- оективные пространства и структурной группой – центропроек- вная группа.

Рассматриваемые в P_3 Λ_1-распределение, H_2-распреде- ние и все присоединенные к ним нормальные распределения, ементы которых являются точечными центропроективными прост- нствами, можно интерпретировать как подрасслоения этого огообразия P^0-структуры с общим многообразием опорных об- зов, т.е. как Λ_1-подрасслоение, H_2-подрасслоение и нор- льные подрасслоения многообразия P^0-структуры. Следователь- , $\mathcal{H}$-распределение в P_3 трактуется как пара подрасслоений Λ_1-подрасслоение и H_2-подрасслоение) многообразия P^0- руктуры с условием инцидентности $\Lambda_1(L_0) \subset H_2(L_0)$ в каждой то- е L_0 базы $B_3 = P_3$ слоев $\Lambda_1(L_0), H_2(L_0)$. Многообразие P^0- руктуры, в котором задано $H_2(\Lambda_1)$-подрасслоение (или кратко $\mathcal{H}$-подрасслоение), назовем расслоенным многообразием $P^0(\mathcal{H})$- руктуры или кратко – многообразием $P^0(\mathcal{H})$.

§ I. Проективная связность в H_2-подрасслоении

Проективную связность в слоях H_2-подрасслоения опреде-лим при помощи системы форм $\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}}$:

$$\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}} = \theta^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}} - \Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0 . \tag{I.1}$$

Формы $\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}}$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}} = \tilde{\theta}^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}} \wedge \tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\rho}} + \omega^{\varkappa}_0 \wedge \Delta\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa} , \tag{I.2}$$

где

$$\Delta\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa} = \nabla\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa} + \Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa}\theta^0_0 - \Gamma^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\varkappa}\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\rho}L}\omega^L_0 + \delta^0_{\bar{\sigma}}\delta^3_{\varkappa}\theta^{\bar{\varepsilon}}_3 + \delta^1_{\bar{\sigma}}\Lambda^3_{1\varkappa}\theta^{\bar{\varepsilon}}_3 + \delta^2_{\bar{\sigma}}H^3_{2\varkappa}\theta^{\bar{\varepsilon}}_3 . \tag{I.3}$$

Значит, на базе $B_3 = P_3$ зададим поле объекта $\{\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa}\}$, который будем называть объектом проективной связности Γ [2], [3] подрасслоения. Формы $\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}}$ в слоях H_2-подрасслоения определ проективную связность Γ тогда и только тогда, когда они уд влетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [1], [4]

$$\mathcal{D}\tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}} = \tilde{\theta}^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}} \wedge \tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} R^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa L}\,\omega^{\varkappa}_0 \wedge \omega^L_0 , \tag{I.4}$$

причем

$$\Delta\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa} = \Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa L}\,\omega^L_0 , \qquad R^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}\varkappa L} = 2\,\Gamma^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}[\varkappa L]} \ - \tag{I.5}$$

тензор кривизны-кручения проективной связности H_2-подрассл ения.

Следуя работе [6], охват объекта проективной связност Γ осуществим по формулам:

$$\begin{cases} \Gamma^{\bar{\rho}}_{0\sigma} = 0, \quad \Gamma^0_{1\varkappa} = \nu_3\Lambda^3_{1\varkappa} , \quad \Gamma^{\rho}_{1\varkappa} = \nu^{\rho}_3\Lambda^3_{1\varkappa} , \quad \Gamma^{\rho}_{03} = \nu^{\rho}_3 , \\ \Gamma^0_{03} = \nu_3 , \quad \Gamma^0_{2\varkappa} = \nu_3 H^3_{2\varkappa} , \quad \Gamma^{\rho}_{2\varkappa} = \nu^{\rho}_3 H^3_{2\varkappa} . \end{cases} \tag{I.6}$$

Здесь поле объекта $\{\nu_3, \nu^{\rho}_3\}$ определяет инвариантную точку Ке нигса $\underset{(\nu)}{K}$ нормали ν Нордена-Тимофеева I-го рода [7].

Покажем, что построенная проективная связность Γ отно сится к классу проективных связностей, определенных путем проектирования. Действительно, при определяющем связность отображении

$$L_{\bar{\varkappa}}(u+du) \longrightarrow L_{\bar{\varkappa}}(u, du) = L_{\bar{\varkappa}}(u) + \theta^{\bar{\jmath}}_{\bar{\varkappa}} L_{\bar{\jmath}}(u) + [2] \tag{I.7}$$

образом плоскости $H_2(u+du) = [L_{\bar{\sigma}}(u+du)]$ является плоскость

$$H_2(u,du) = [L_{\bar{\sigma}}(u,du)] : L_{\bar{\sigma}}(u+du) \to L_{\bar{\sigma}}(u,du) = L_{\bar{\sigma}}(u) + \theta^{\bar{\jmath}}_{\bar{\sigma}} L_{\bar{\jmath}} + [2] . \tag{I.8}$$

На плоскость $H_2 = [L_{\bar{\sigma}}(u)]$ спроектируем образ $[L_{\bar{\sigma}}(u,du)]$ соседней плоскости $H_2(u+du)$, приняв за центр проектирован точку $\underset{(\nu)}{K}$, лежащую на нормали ν . Эта проекция определит о

ражение

$$L_{\bar{\sigma}}(u,du) \to \hat{L}_{\bar{\sigma}}(u,du) = L_{\bar{\sigma}}(u,du) + \ell^3_{\bar{\sigma}}\underset{(\nu)}{K} = L_{\bar{\sigma}}(u) + \theta^{\bar{\varkappa}}_{\bar{\sigma}}L_{\bar{\varkappa}} + \ell^3_{\bar{\sigma}}\underset{(\nu)}{K} =$$

$$L_{\bar{\sigma}}(u) + (\theta^0_{\bar{\sigma}} + \ell^3_{\bar{\sigma}})L_0 + (\theta^1_{\bar{\sigma}} + \ell^3_{\bar{\sigma}}\nu^1_3)L_1 + (\theta^2_{\bar{\sigma}} + \nu^2_3\ell^3_{\bar{\sigma}})L_2 + (\theta^3_{\bar{\sigma}} + \ell^3_{\bar{\sigma}})L_3 . \tag{I.9}$$

роекции вершин $L_{\bar{\sigma}}(u, du)$ должны располагаться в плоскости $(u) = [L_{\bar{\sigma}}(u)]$, т.е. в формах (I.9) должны отсутствовать члены с L_3 . Следовательно,

$$\ell^3_{\bar{\sigma}} = -\theta^3_{\bar{\sigma}} . \tag{I.10}$$

так, суперпозиция отображений (I.8) и (I.9) задает отображе-ие, определяющее проективную связность в H_2-подрасслоении, пределенную путем проектирования

$$L_{\bar{\sigma}}(u,du) \to \hat{L}_{\bar{\sigma}}(u,du) = L_{\bar{\sigma}}(u) + \tilde{\theta}^{\bar{\varepsilon}}_{\bar{\sigma}} L_{\bar{\varepsilon}} .$$

десь формы

$$\begin{cases} \tilde{\theta}^0_0 = \theta^0_0 - \nu_3\,\omega^3_0 , & \tilde{\theta}^0_1 = \theta^0_1 - \nu_3\Lambda^3_{1\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0 , \\ \tilde{\theta}^0_2 = \theta^0_2 - \nu_3 H^3_{2\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0 , & \tilde{\theta}^{\varepsilon}_0 = \theta^{\varepsilon}_0 - \nu^{\varepsilon}_3\,\omega^3_0 , \\ \tilde{\theta}^{\varepsilon}_1 = \theta^{\varepsilon}_1 - \nu^{\varepsilon}_3\Lambda^3_{1\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0 , & \tilde{\theta}^{\varepsilon}_2 = \theta^{\varepsilon}_2 - \nu^{\varepsilon}_3 H^3_{2\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0 , \end{cases} \tag{I.11}$$

пределяющие главную часть полученного отображения, и являют-я формами проективной связности Γ в H_2-подрасслоении, оп-еделенной путем проектирования. Объект этой связности опре-еляется формами (I.6), что и требовалось показать.

§ 2. Проективные связности в Λ_1-подрасслоении

I. Можно доказать, что формы $\tilde{\theta}^p_q = \theta^p_q - \gamma^p_{q\varkappa}\,\omega^{\varkappa}_0$ определяют роективную связность γ в слоях Λ_1-подрасслоения, если они довлетворяют следующим структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\tilde{\theta}^p_q = \tilde{\theta}^s_q \wedge \tilde{\theta}^p_s + \omega^{\varkappa}_0 \wedge \Delta\gamma^p_{q\varkappa} , \tag{2.1}$$

де

$$\Delta\gamma^p_{q\varkappa} = \nabla\gamma^p_{q\varkappa} + \gamma^p_{q\varkappa}\theta^0_0 - \gamma^s_{q\varkappa}\gamma^p_{s\jmath}\omega^{\jmath}_0 + \delta^0_q\delta^u_{\varkappa}\theta^p_u - \delta^0_q\delta^1_{\varkappa}\Lambda^2_1\theta^p_2 + \Lambda^u_{1\varkappa}\theta^p_u\delta^1_q . \tag{2.2}$$

ормы $\Delta\gamma^p_{q\varkappa}$ и $\omega^{\varkappa}_0$ образуют вполне интегрируемую систему и оп-еделяют на базе $B_3 = P_3$ поле объекта $\{\gamma^p_{q\varkappa}\}$:

$$\Delta\gamma^p_{q\varkappa} = \gamma^p_{q\varkappa L}\,\omega^L_0 . \tag{2.3}$$

тот объект назовем объектом проективной связности γ [2],[3] Λ_1- подрасслоения.

Структурные уравнения Картана-Лаптева (2.1) для слоевых форм $\tilde{\theta}^p_q$ Λ_1-подрасслоения принимают вид

$$\mathcal{D}\tilde\theta^p_q = \tilde\theta^s_q \wedge \tilde\theta^p_s + \frac{1}{2}\tau^p_{qKL}\,\omega^K_0 \wedge \omega^L_0,$$

где объект

$$\tau^p_{qKL} = 2\gamma^p_{q[KL]} \qquad (2.4)$$

является тензором кривизны-кручения проективной связности Λ_1-подрасслоения.

Связность γ геометрически задается в слоях Λ_1-подрас слоения следующим образом: надо спроектировать на прямую $\Lambda_1(u)=[L_p(u)](L_0)$ образ соседней прямой $\Lambda_1(u+du)=[L_p(u+du)]$, приняв оснащающую в смысле Картана прямую $K(L_0)=[\underset{(\Psi)}{K},P]$ за вер шину проектирования. Приведем охваты компонент объекта связ сти γ Λ_1-подрасслоения:

$$\gamma^0_{0x}=K_x,\quad \gamma^1_{0x}=K^1_x,\quad \gamma^0_{1x}=K_u\Lambda^u_{1x},\quad \gamma^1_{1x}=K^1_u\Lambda^u_{1x}, \qquad (2.5)$$

где

$$K_2=k_2,\quad K_3=\Psi_3-k_2\Psi^2_3,\quad K_1=-k_2\Lambda^2_1,$$

$$K^1_2=\chi^1_2,\quad K^1_3=\Psi^1_3-\chi^1_2\Psi^2_3,\quad K^1_1=-\chi^1_2\Lambda^2_1.$$

2. Введем еще одну связность $\overset{*}{\gamma}$ на Λ_1-подрасслоении, торую получим проектированием слоя Λ_1-подрасслоения на сос ний слой из инвариантной точки $P=L_2+\chi^1_2L_1+k_2L_0$. В этом сл охваты компонент $\overset{*}{\gamma}{}^p_{qx}$ объекта связности $\overset{*}{\gamma}$ осуществляются п формулам:

$$\begin{cases} \overset{*}{\gamma}{}^0_{0\sigma}=K_\sigma, & \overset{*}{\gamma}{}^0_{1\sigma}=K_2\Lambda^2_{1\sigma}, \quad \overset{*}{\gamma}{}^p_{q3}=0, \\ \overset{*}{\gamma}{}^1_{0\sigma}=K^1_\sigma, & \overset{*}{\gamma}{}^1_{1\sigma}=K^1_2\Lambda^2_{1\sigma}. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Сравнивая формулы (2.6) и (2.5), можно сделать вывод, что пр тивная связность $\overset{*}{\gamma}$ является частным случаем проективной св сти γ на Λ_1-подрасслоении и получается из последней прира ванием к нулю компонент γ^p_{q3} в соотношениях (2.5). Согласно боте [5] такую связность $\overset{*}{\gamma}$ будем называть индуцированной ективной связностью в Λ_1-подрасслоении.

3. При определяющем связность отображении (I.7) образо прямой $\Lambda_1(u+du)=[L_p(u+du)]$ является прямая $\Lambda_1(u,du)=[L_p(u,du)]$:

$$L_p(u+du)\to L_p(u,du)=L_p(u)+\theta^{\bar K}_p L_{\bar K}(u)+[2]. \qquad (2.7)$$

Спроектируем теперь образ $[L_p(u,du)]$ соседней прямой $\Lambda_1(u+du)$ на плоскость $H_2(u)=[L_{\bar\sigma}(u)(L_0)]$, приняв за центр проектирова ния точку $\underset{(\Psi)}{K}\in\Psi(L_0)$. Проводя аналогичные (как в § I) рассужде ния, получим отображение, определяющее проективную связност $\hat\gamma$ в слоях Λ_1-подрасслоения. Компоненты объекта связности

еют следующий вид:

$$\begin{cases} \hat\gamma^{\xi}_{0\sigma}=0, & \hat\gamma^0_{03}=\Psi_3, \quad \hat\gamma^{\xi}_{03}=\Psi^{\xi}_3, \\ \hat\gamma^0_{1x}=\Lambda^3_{1x}\Psi_3, & \hat\gamma^{\xi}_{1x}=\Lambda^3_{1x}\Psi^{\xi}_3. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Полученную связность $\hat\gamma$ назовем усеченной проективной язностью Γ в Λ_1-подрасслоении, т.к. формулы охвата компо нт $\hat\gamma^{\xi}_{qx}$ получаются из соотношений (I.6) компонент объекта оективной связности Γ путем исключения компонент $\Gamma^{\bar\xi}_{2x}$ "усечения" на $\Gamma^{\bar\xi}_{2x}$).

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погру нных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. № 2. 275-382.

2. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обоб нные пространства // Тр. 4-го Всес. матем. съезда (1961). , 1964. Т.2. С.226-233.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной язности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. 49-94.

4. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н .Н. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // . геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

5. О с т и а н у Н.М., Б а л а з ю к Т.Н. Многообра я, погруженные в пространства проективной структуры // облемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.75-115.

6. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия по с // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.25-54.

7. П о п о в Ю.И., Л и с и ц ы н а И.Е. $\mathcal{H}$-распреде ние трехмерного проективного пространства // Дифференциаль я геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. . / Калинингр. ун-т. Калининград, 1993. Вып.24. С.83-92.