12. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.- "Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР", 1973, т.4, с.7-70.

13. Столяров А.В. Внутренняя геометрия сетей на распределениях m -мерных линейных элементов проективного пространства P_n. Тезисы докл. на 6-й Всес. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, с.231-233.

14. Столяров А.П. О внутренней геометрии поверхности Картана.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.III-II8.

15. Широков А.П. О нормализациях в проективном пространстве с заданным расслоением.- "Изв. вузов. Матем.", 1974, № 5, с. 216-221.

16. Galvani O. La réalisation des connexions ponctuelles affinés et la géométrie des groupes de Lie J. math pures et appl., 1946, 25, 209-239.

17. Cartan E. Leçons sur la théorie des éspaces á connexion projective. Paris, 1937.

УДК 513.73

Г.П.Ткач

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГООБРАЗИЙ ПАР ФИГУР В A_3.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается пара B -невырожденная конгруэнция пар фигур $\{F,\ell\}$, где F -парабола, ℓ -прямая, инцидентная плоскости параболы, пересекающая параболу F, но не являющаяся ей диаметром. Строится канонический репер пары B, доказывается, что такие пары существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов. Исследуются некоторые классы пары B.

§I. Канонический репер пары B. Пары B°

Присоединим к паре B канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, имеющий следующую геометрическую характеристику: вершина A репера R выбирается в точке пересечения с параболой F ее касательной ℓ', проведенной параллельно прямой ℓ. Вектор $\bar{e}_1$ направлен по диаметру параболы в точке A, конец $\bar{e}_1$ лежит на прямой ℓ. Вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к параболе, вектор $\bar{e}_3$ -параллельно линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_1) и (P_2), где P_1 и P_2 -точки пересечения прямой ℓ с параболой F.

Условие

$$\frac{\beta_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\beta_1^*\gamma_2^*-\alpha_2^*\gamma_1^*}-\frac{\gamma_1\beta_2-\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1^*\beta_2^*-\alpha_1^*\gamma_2^*}\neq 0, \tag{1.1}$$

где

$$\alpha_i = 1+\Gamma^i_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^i_{2i}, \quad \alpha_i^* = 1+\Gamma^i_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^i_{2i},$$

$$\beta_i = \Gamma^j_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^j_{2i}, \quad \beta_i^* = \Gamma^j_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^j_{2i},$$

$$\gamma_i = \Gamma^3_i+\Gamma^3_{1i}+\sqrt{2}\,\Gamma^3_{2i}, \quad \gamma_i^* = \Gamma^3_i+\Gamma^3_{1i}-\sqrt{2}\,\Gamma^3_{2i},$$

($i,j,\kappa=1,2$ $i\neq j$ по i и j суммирование не производится)

характеризует пары с непараллельными касательными плоскостями к поверхностям (P_i).

Условие того, что вектор $\bar{e}_3$ параллелен линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_i), запишется в виде

$$(\omega^1+\omega^1_1)\wedge(\omega^2+\omega^2_1)+2\,\omega^1_2\wedge\omega^2_2=0,$$
$$(\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^2_2+\omega^1_2\wedge(\omega^2+\omega^2_1)=0. \tag{1.2}$$

Уравнения параболы F и прямой ℓ в каноническом репере примут соответственно вид:

$$(x^2)^2-2x^1=0, \quad x^3=0,$$
$$x^1=1, \quad x^2=t, \quad x^3=0. \tag{1.3}$$

Исключая из рассмотрения случай вырождения поверхности (A) примем формы Пфаффа ω^i за линейно независимые формы пары B.

Система пфаффовых и конечных уравнений пары B запишется в виде

$$\omega^3=\Gamma^3_\kappa\omega^\kappa, \quad \omega^i_j=\Gamma^i_{j\kappa}\omega^\kappa, \quad \omega^i_i=\Gamma^i_{j\kappa}\omega^\kappa,$$
$$\omega^3_i=\Gamma^3_{i\kappa}\omega^\kappa, \quad \omega^i_3=\Gamma^i_{3\kappa}\omega^\kappa, \tag{1.4}$$

$$(1+\Gamma^1_{11})(1+\Gamma^2_{12})-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+2(\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21})=0,$$
$$(1+\Gamma^1_{11})\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21}+\Gamma^1_{21}(1+\Gamma^2_{12})-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}=0. \tag{1.5}$$

Анализируя систему (I.4) и (I.5), убеждаемся, что пары B существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Определение I. Пара многообразий (L), (α), где (L)-прямолинейная конгруэнция или конгруэнция плоских кривых, а (α)-семейство попарно непараллельных плоскостей, называется односторонне аффинно расслояемой от конгруэнции (L) к многообразию (α), если: I/между плоскими кривыми L конгруэнции (L) и плоскостями α многообразия (α) установлено взаимно однозначное соответствие; 2/к конгруэнции (L) можно присоединить однопараметрическое семейство Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой поверхности семейства Σ в точках пересечения с кривой L конгруэнции (L) были параллельны соответствующей плоскости α многообразия (α).

Определение 2. Парой B° называется пара B, для которой: I/существует аффинное расслоение от конгруэнции (F) к многообразию (Π_1); 2/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (ℓ) к прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$; 3/конец вектора $\bar{e}_1$ принадлежит характеристическому подпространству плоскости параболы.

Π_α-плоскость, определяемая уравнением $x^\alpha=0$, где $\alpha,\beta,\gamma=$ 1,2,3.

Т е о р е м а I. Существуют два непересекающихся класса пар B° -пары B_1° и B_2° с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары B° определяются системой Пфаффа (I.4) и квадратичными уравнениями

$$\omega^1\wedge\omega_2^1=0,\ (\omega^2+\omega_1^2)\wedge\omega_2^1=0,\ (\omega_1^1-2\omega_2^2)\wedge\omega_2^1=0,$$

$$(\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_1^2+2\omega_2^1\wedge\omega_2^2=0,\ (\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_1^3+(\omega^2+\omega_1^2)\wedge\omega_2^3=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega_1^1-\omega^2\wedge\omega_2^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0,\ \omega^2\wedge\omega_2^1+\omega^3\wedge\omega_3^1=0, \tag{1.6}$$

$$(\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega^2=0,\ (\omega^1+\omega_1^1)\wedge\omega_2^2=0,\ \omega_2^3\wedge\omega_3^1=0.$$

Рассмотрим случай

$$\omega_2^1\neq 0. \tag{1.7}$$

Тогда система (I.6) с учетом (I.4) приводится к виду:

$$1+\Gamma_{12}^2=0,\ 1+\Gamma_{11}^1=0,\ \Gamma_{22}^1=0,\ \Gamma_{12}^1-2\Gamma_{22}^2=0,\ \Gamma_{12}^1\Gamma_{21}^2=0,$$

$$\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1-\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^1=0,\ \Gamma_{12}^1+\Gamma_{21}^1-\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^2+\Gamma_{22}^3\Gamma_{31}^2=0, \tag{1.8}$$

$$\Gamma_{21}^1-\Gamma_1^3\Gamma_{32}^1+\Gamma_2^3\Gamma_{31}^1=0,\ \Gamma_{12}^1(\Gamma_{21}^1-\Gamma_{11}^2)=0,\ \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^3-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3=0,$$

Пусть

$$\Gamma_{12}^1=0, \tag{1.9}$$

тогда из последнего уравнения системы (I.8) имеем:

$$\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3=0.$$

Случай

$$\Gamma_{22}^3=0$$

ведет к понижению ранга системы форм

$$\{\omega_2^3,\ \omega_2^1,\ \omega^1+\omega_1^1,\ \omega^3+\omega_1^3\}, \tag{1.10}$$

что противоречит пункту 2 определения 2, а случай

$$\Gamma_{11}^2=0$$

приводит к противоречию с условием (I.I).

Пусть теперь

$$\Gamma_{12}^1\neq 0,$$

тогда

$$\Gamma_{21}^1-\Gamma_{11}^2=0,\quad \Gamma_{21}^2=0.$$

Этот случай также ведет к тому, что касательные плоскости к поверхностям (P_i) параллельны, и поэтому исключается из рассмотрения.

Положим теперь

$$\omega_2^1=0. \tag{1.11}$$

Тогда из первых трех уравнений системы (I.8) имеем, что ранг системы форм

$$\{\omega^1,\ \omega^2+\omega_1^2,\ \omega_1^1-2\omega_2^2\}$$

равен двум, т.е. параболы F образуют двупараметрическое семейство в плоскости Π_3, а из последних двух уравнений системы (I.8) получаем

$$\omega^3 \wedge \omega^1_3 = 0, \quad \omega^3_2 \wedge \omega^1_3 = 0.$$

Если

$$\omega^1_3 = 0, \tag{1.12}$$

т.е. формы ω^3 и ω^3_2 линейно независимы, то система (I.8) с учетом (I.12), (I.11) и (I.4) примет вид:

$$1+\Gamma^1_{11}=0, \quad \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}=0, \quad \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{21}=0, \tag{1.13}$$

$$\Gamma^3_{11}\Gamma^1_{12}-(1+\Gamma^2_{12})\Gamma^3_{21}+\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{22}=0, \quad \Gamma^1_{12}-\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31}=0.$$

Если

$$\Gamma^1_{12}=0,$$

то

$$\omega^1+\omega^1_1=0.$$

а это противоречит условию (I.I), следовательно,

$$\Gamma^1_{12}\neq 0, \quad \Gamma^2_{11}=0, \quad \Gamma^2_{21}=0. \tag{1.14}$$

Пары B°, для которых плоскость параболы F образует двупараметрическое семейство, назовем парами B°_1. Они определяются следующими пфаффовыми и конечными уравнениями:

$$\omega^1_2=0, \quad \omega^1_3=0, \quad \omega^3+\omega^3_1=0, \quad \omega^i+\omega^i_1=(\delta^i_1+\Gamma^i_{12})\omega^2,$$

$$\omega^2_2=\Gamma^2_{22}\omega^2, \quad \omega^3=\Gamma^3_k\omega^k, \quad \omega^3_2=\Gamma^3_{2k}\omega^k, \quad \omega^2_3=\Gamma^2_{3k}\omega^k \tag{1.15}$$

$$\Gamma^1_{12}-\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32}+\Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31}=0, \quad \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{12}-(1+\Gamma^2_{12})\Gamma^3_{21}=0. \tag{1.16}$$

Анализируя систему (I.I5), (I.I6), находим, что пары B°_1 определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Пусть теперь

$$\omega^1_3\neq 0,$$

т.е. формы ω^3 и ω^3_2 – линейно зависимы, тогда

$$\omega^3_2=\alpha\,\omega^1_3, \quad \omega^3=\beta\,\omega^1_3.$$

Если

$$\alpha=0,$$

то из системы (I.I3) имеем

$$\Gamma^1_{12}=0,$$

(противоречие с (I.I4).

Если

$$\beta=0,$$

то из замыкания $\omega^3=0$ имеем:

$$\Gamma^3_{21}=0,$$

а это приводит к понижению ранга системы (I.I0).

Следовательно,

$$\alpha\neq 0, \quad \beta\neq 0, \tag{1.17}$$

тогда второе уравнение системы (I.I6) примет вид:

$$\alpha\Gamma^1_{31}\left[1+\Gamma^2_{12}-\beta\left(\Gamma^1_{31}\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}\right)\right]=0.$$

Случай

$$\Gamma^1_{31}=0$$

приводит к противоречию с условием (I.I), следовательно,

$$1+\Gamma^2_{12}-\beta\left(\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}\right)=0. \tag{1.18}$$

Пары B°, для которых плоскость параболы образует однопараметрическое семейство, называются парами B°_2.

Система уравнений Пфаффа, определяющая пары B°_2, имеет вид:

$$\omega^3+\omega^3_1=0, \quad \omega^1_2=0, \quad \omega^1+\omega^1_1=\Gamma^1_{12}\omega^2,$$

$$\omega^3=\beta\omega^1_3, \quad \omega^3_2=\alpha\omega^2_3, \quad \omega^2_2=\Gamma^2_{22}\omega^2, \qquad (1.19)$$

$$\omega^2+\omega^2_1=\beta\left(\Gamma^1_{31}\Gamma^2_{32}-\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{31}\right)\omega^2, \quad \omega^i_3=\Gamma^i_{3k}\omega^k.$$

Пары B^o_2 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов. Из уравнений (I.I6),(I.I5) непосредственно вытекает

Т е о р е м а 2. Пары B^o_1 обладают следующими геометрическими свойствами: I/координатные линии $\omega^2=0$ соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций $(A,\bar{e}_1)$, (ℓ); 2/координатные линии $\omega^1=0$ соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций (ℓ^1), $(A,\bar{e}_3)$; 3/характеристические точки плоскостей Π_3 и Π_2 лежат на диаметре параболы F, проходящем через начало координат; 4/один собственный фокус прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_1)$ совпадает с характеристической точкой плоскости Π_3, другой- характеристической точкой плоскости Π_2; 5/поверхность (A_1) вырождается в линию; 6/конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$ и (ℓ) являются цилиндрическими.

§ 2. Пары B^*

О п р е д е л е н и е 4. Парой B^* называется пара B, для которой существует аффинное расслоение от конгруэнции (F) к многообразию (Π_1), плоскость параболы является касательной плоскостью к поверхности (A), а координатные линии $\omega^1\omega^2=0$ — асимптотическими линиями этой поверхности.

Т е о р е м а 3. Пары B^* существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары B^* определяются системой Пфаффа (I.4) и квадратичными уравнениями

$$\omega^i\wedge\omega^1_2=0, \ (\omega^1+\omega^1_1)\wedge(\omega^2+\omega^2_1)+2\omega^1_2\wedge\omega^2_2=0,$$

$$\omega^1\wedge\omega^3_1+\omega^2\wedge\omega^3_2=0, \ (\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^2_2+\omega^1_2\wedge(\omega^2+\omega^2_1)=0, \quad (2.1)$$

$$(\omega^1_1-2\omega^2_2)\wedge\omega^1_2-2\omega^3_2\wedge\omega^1_3=0, \quad \omega^2_1\wedge\omega^1_2+\omega^3_1\wedge\omega^1_3=0.$$

Из первых двух уравнений системы (2.I) имеем:

$$\omega^1_2=0, \qquad (2.2)$$

замыкание которого

$$\omega^3_2\wedge\omega^1_3=0.$$

Тогда система (2.I) примет вид:

$$\omega^k\wedge\omega^3_k=0, \quad \omega^3_i\wedge\omega^1_3=0,$$

$$(\omega^1+\omega^1_1)\wedge\omega^2_2=0, \quad (\omega^1+\omega^1_1)\wedge(\omega^2+\omega^2_1)=0,$$

откуда

$$\omega^1_3=0, \ \omega^i+\omega^i_1=m_i\,\omega^2_2, \qquad (2.3)$$

причем, учитывая (I.I), $m_i\neq 0$.

Замыкая уравнения

$$\omega^3_i=b\,\omega^j,$$

получим

$$-\frac{1}{2}\,d\ln b=\omega^3_3+(m_2\Gamma^2_{22}-1)\,\omega^1. \qquad (2.4)$$

Система Пфаффа, определяющая пары B^*, запишется в виде

$$\omega^3=0, \ \ \omega^1_2=0, \ \ \omega^1_3=0, \ \ \omega^3_i=b\,\omega^j, \ \ \omega^i+\omega^i_1=m_i\,\omega^2_2, \quad (2.5)$$

$$\omega_2^2=\Gamma_{2k}^2\omega^k,\quad \omega_3^2=\Gamma_{3k}^2\omega^k,\ -\frac{1}{2}\,d\ln b=\omega_3^3+(m_2\Gamma_{22}^2-1)\omega^1. \quad (2.5)$$

Анализируя систему (2.5), заключаем, что пары B^* существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Для поверхности (A) пар B^* найдены: аффинная нормаль, соприкасающиеся квадрики, направления и линии Дарбу, пучок квадрик Дарбу.

Т е о р е м а 4. Пары B^* обладают следующими геометрическими свойствами: I/ аффинная нормаль поверхности (A) лежит в плоскости Π_1; 2/ прямые ℓ^1 образуют однопараметрическое семейство; 3/ конгруэнция $(A,\bar{e}_3)$ – цилиндрическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Аффинная нормаль поверхности (A) определяется уравнением

$$\bar{H}=A+\Gamma_{12}^2\bar{e}_2+b\bar{e}_3,$$

откуда следует утверждение теоремы. 2/ Так как ранг системы форм $\{\omega^1,\omega^3,\omega_2^1,\omega_2^3\}$ равен единице, то прямые ℓ^1 образуют однопараметрическое семейство. 3/ Уравнения для определения фокусов и торсов луча прямолинейной конгруэнции $(A,\bar{e}_3)$ имеют вид:

$$\lambda\Gamma_{3,2}^2+1=0,$$

$$\omega^1\omega_3^2=0,$$

откуда следует, что конгруэнция $(A,\bar{e}_3)$ – цилиндрическая, т.е. одно семейство торсов состоит из цилиндров.

О п р е д е л е н и е 4. Пары B^*, для которых касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна плоскости Π_2, называется парой B_0^*.

Т е о р е м а 5. Пары B_0^* существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная плоскость к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ параллельна плоскости Π_2 при условии

$$\omega_1^2=0. \quad (2.6)$$

Из (2.3) имеем:

$$m_2\Gamma_{21}^2=0,\quad m_1\Gamma_{22}^2-1=0,$$

а уравнение (2.4) примет вид:

$$\frac{1}{2}d\ln b+\omega_3^3=0. \quad (2.7)$$

Замыкая уравнения (2.6) и (2.7), с учетом этих же уравнений и системы (2.5), получим:

$$b\,\Gamma_{3i}^2=0,$$

откуда

$$\omega_3^2=0.$$

Система уравнений Пфаффа, определяющая пары B_0^*, имеет вид:

$$\omega^3=0,\quad \omega_j^i=0,\quad \omega_3^i=0,\quad \omega_i^3=b\omega^j,$$

$$\omega^1+\omega_1^1=m_1\omega_2^2,\quad \omega_2^2=\Gamma_{22}^2\omega^2,\ \frac{1}{2}d\ln b+\omega_3^3=0. \quad (2.8)$$

Из системы (2.8) следует, что произвол существования пар две функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Для пар B_0^* I/ прямая $\bar{R}=\bar{A}+\bar{e}_3$ является аффинной нормалью поверхности (A); 2/ поверхность (A) – гиперболический параболоид; 3/ поверхность (A_1) вырождается в линию; 4/ точка A является сдвоенной фокальной точкой параболы F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Вектор аффинной нормали поверхности (A) для пар B_0^* имеет вид:

$$\bar{n}\,(0,0,b).$$

2/Асимптотические линии поверхности (A) определяются уравнением $\omega^1\omega^2=0$.Векторы $\bar{e}_i$ -векторы касательных к этим линиям,следовательно,

$$(d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=-\omega^1\bar{e}_1,$$

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^2=0}=\Gamma^2_{22}\bar{e}_2.$$

значит линии $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ -прямые.Так как поверхность имеет две серии прямолинейных образующих,то она является квадрикой.Её уравнение имеет вид:

$$Q_A=b\,x^1x^2-x^3=0. \tag{2.9}$$

Поэтому (A) -гиперболический параболоид.3/Найдем

$$dA_1=(\omega^k+\omega_1^k)\bar{e}_k+(\omega^3+\omega_1^3)\bar{e}_3=(m_1\Gamma^2_{22}\bar{e}_1+\bar{e}_2+b\bar{e}_3)\omega^2,$$

следовательно,поверхность (A_1) вырождается в линию.

4/Система,определяющая фокальные поверхности параболы F, для пар B_0^* имеет вид:

$$(x^2)^2-2x^1=0,\quad x^3=0,$$
$$(x^2)^2\left[(x^2)^2+2\Gamma^2_{22}(m_1-2)x^2-6\right]=0. \tag{2.10}$$

Из (2.I0) видно,что A -сдвоенная фокальная точка параболы F конгруэнции (F) .Причем,в расширенном аффинном пространстве существует только четыре фокальные точки параболы F конгруэнции (F).

Список литературы.

I.Ткач Г.П. Аффинно расслояемые пары многообразий фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.Тезисы докладов 5 Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии,Самарканд, 1972,с.2-I5