ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6. 1975

В. В. Махоркин

МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОЙСТВОМ АССОЦИИРОВАННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе рассматриваются „$n-1$"-мерные многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства, гиперквадрики которых являются соприкасающимися гиперквадриками некоторой гиперповерхности. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы „$(n-1)$"-мерное многообразие гиперквадрик n-мерного проективного пространства обладало этим свойством.

Фокальные точки ранга два

Отнесем проективное пространство P_n к реперу $\{A_\alpha\}$ с деривационными формулами:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n), \tag{1}$$

где ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям проективной группы

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условиям эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0. \tag{3}$$

Уравнение гиперквадрики Q_{n-1} имеет в репере $\{A_\alpha\}$ следующий вид:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \tag{4}$$

причем

$$\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0. \tag{5}$$

Система пфаффовых уравнений многообразия $K(n-1, n)$ [2] имеет вид:

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\, \tau^i \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n-1), \tag{6}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma, \tag{7}$$

а τ^i инвариантные формы бесконечной параметрической группы [1].

Фокальное многообразие ранга один [2] гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1, n)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta &= 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

и состоит в общем случае из 2^n точек. Фокальное многообразие ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1, n)$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta &= 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta i}\, x^\alpha x^\beta &= 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta ij}\, x^\alpha x^\beta &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$d\Lambda_{\alpha\beta i}-\Lambda_{\gamma\beta i}\,\omega_{\alpha}^{\gamma}-\Lambda_{\alpha\gamma i}\,\omega_{\beta}^{\gamma}-\Lambda_{\alpha\beta k}\,\tau_{i}^{k}=\Lambda_{\alpha\beta ij}\,\tau^{j}. \quad (10)$$

Фокальное многообразие ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ в общем случае является пустым множеством, так как в системе уравнений (9) больше „n" уравнений.

Для некоторых типов многообразий $K(n-1,n)$ система уравнений (9) может однако определять непустое многообразие. Таковыми, например, как будет показано далле, являются многообразия квадрик Ли некоторой поверхности в P_3.

Рассмотрим случай, когда фокальное многообразие ранга два является подмногообразием фокального многообразия ранга один, состоящего из 2^n точек.

Т е о р е м а. Для того чтобы некоторая фокальная точка ранга один гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ описывала гиперповерхность, соприкасающуюся гиперквадрикам многообразия $K(n-1,n)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала фокальному многообразию ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность.
Осуществим следующую канонизацию репера $\{A_\alpha\}$:

$$a_{on}=-1\,,\quad a_{oo}=\Lambda_{ooi}=\Lambda_{ooij}=0, \quad (11)$$

$$\operatorname{rang}(\Lambda_{ooijk})=n-1\,,\quad \operatorname{rang}(\Lambda_{oijk})=n-1. \quad (12)$$

Канонизация (11), (12), во-первых, означает [2], что точка A_o репера $\{A_\alpha\}$ помещена в фокальную точку ранга один гиперквадрики Q_{n-1} и описывает гиперповерхность (A_o), а, во-вторых, из системы уравнений (6), (10) следует;

$$\omega_i^n = a_{ij}\,\omega^j, \quad (13)$$

что означает соприкосновение гиперквадрики Q_{n-1} гиперповерхности (A_o).

Необходимость.
Если гиперквадрика Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ соприкасается поверхности (A_o), то имеет место

$$\omega_i^n = a_{ij}\,\omega^j,$$

а также соотношения (11), (12), которые означают, что точка A_o принадлежит фокальному многообразию ранга два.
Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Нульмерные компоненты фокального многообразия ранга два гиперквадрики Q_{n-1} многообразия $K(n-1,n)$ называются фокальными точками ранга два.
Из определения следует, что фокальная точка ранга два является фокальной точкой ранга один.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многообразий поверхностей. –В кн.: Итоги науки. Геометрия 1963. 1965, с.5–64. (М. ВИНИТИ АН СССР).

2. М а х о р к и н В.В. Некотрые типы многообразий гиперквадрик. –В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с.50–59.