УДК 514.76

А. В. Букушева
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-6

О связностях с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях

Вводится понятие неголономного пара-Кенмоцу многообразия. Неголономное пара-Кенмоцу многообразие является естественным обобщением пара-Кенмоцу многообразия — от распределения неголономного пара-Кенмоцу многообразия не требуется выполнения свойства инволютивности. Выделяются собственно неголономные пара-Кенмоцу многообразия — неголономные пара-Кенмоцу многообразия с неинволютивным распределением. На почти (пара)контактном метрическом многообразии вводится метрическая связность с кручением, названная в работе связностью типа Леви-Чивиты. В случае неголономного пара-Кенмоцу многообразия такая связность имеет более простое строение, чем связность Леви-Чивиты, и в ряде случаев оказывается предпочтительнее с прикладной точки зрения. Связность типа Леви-Чивиты совпадает со связностью Леви-Чивиты тогда и только тогда, когда неголономное пара-Кенмоцу многообразие сводится к пара-Кенмоцу многообразию. Доказывается, что собственно неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты.

***Ключевые слова*:** неголономное пара-Кенмоцу многообразие, связность типа Леви-Чивиты, многообразие Эйнштейна, параконтактное метрическое многообразие

Поступила в редакцию 30.04.2023 г.

Введение

Понятие почти параконтактного многообразия было введено И. Сато [13]. После публикации [16] параконтактные метрические многообразия изучались многими авторами. Структура пара-Кенмоцу была введена Дж. Величко в [15] для трехмерных нормальных почти параконтактных метрических структур. Аналогичное понятие, называемое структурой Р-Кенмоцу, появляется в статье Б. Б. Синхи и К. Л. Саи Прасада [14]. В последние годы значение геометрии пара-Кенмоцу было особо отмечено в нескольких статьях, подчеркивающих важность использования пара-Кенмоцу многообразий в полуримановой геометрии и математической физике [7; 8].

Ранее автором настоящей работы было введено понятие неголономного многообразия Кенмоцу — обобщения многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [11]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [11], в то время как структуры неголономного многообразия Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено в статье [1]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу M обладает рядом замечательных свойств [1; 3]. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [2; 9]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$, обращается в нуль.

В настоящей статье рассматриваются неголономные пара-Кенмоцу многообразия. Такие многообразия устроены более сложно, чем пара-Кенмоцу многообразия. Аналитически сложность возрастает за счет появления эндоморфизма $\psi: TM \to TM$, определяемого с помощью равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Назовем эндоморфизм ψ вторым структурным эндоморфизмом. Если характеристическим уравнением для пара-Кенмоцу многообразия является уравнение вида $(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y =$

$= g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X$, то таковым для неголономного пара-Кенмоцу многообразия является уравнение

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right)Y = \left(\omega(\varphi Y, X) + g(\varphi X, Y)\right)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi(X + \psi X).$$

Здесь $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты.

На многообразиях с почти (пара)контактной метрической структурой наряду со связностью Леви-Чивиты рассматриваются связности с кручением [6]. В частности, на пара-Кенмоцу многообразиях исследовались такие связности, как связность Схоутена — ван Кампена, связность Голаба и другие связности [10; 12; 16]. Перечисленные выше связности выводились из связности Леви-Чивиты с использованием подходящих конструкций. Подобные конструкции можно применить для получения связностей с кручением и для неголономных пара-Кенмоцу многообразий. Однако наличие эндоморфизма $\psi: TM \to TM$ усложняет строение полученных связностей, делает их менее гибкими по сравнению со случаем пара-Кенмоцу многообразия. В настоящей работе определяется метрическая связность с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях, максимально сохраняющая свойства связности Леви-Чивиты. Изучаются свойства полученной связности.

Основные результаты

Рассмотрим почти параконтактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$ — заданная на многообразии M почти параконтактная метрическая структура, где φ — тензор типа (1,1), называемый первым структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — псевдориманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = I - \eta \otimes \vec{\xi}$,

2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$,

3)$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker(\eta)$ называется *распределением почти параконтактной структуры*.

Для параконтактных метрических многообразий выполняются также следующие условия:

4) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 5) $\eta \circ \varphi = 0$, 6) $\eta(X) = g(X, \vec{\xi}), X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти параконтактная метрическая структура называется параконтактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению *D,* называется оснащением распределения *D*. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Карту $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, \dots, n;\ a, b, c = 1, \dots, n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_{\mathrm{n}} = \vec{\xi}$ [4; 5]. Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}),\quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле *t* типа (p, q), заданное на почти (пара)контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D) или трансверсальным, если *t* обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$

или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Внутренней линейной связностью ∇ [4; 5] на многообразии с почти (пара)контактной метрической структурой называется отображение $\nabla \colon \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
2) $\nabla_X f Y = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma^d_{ac}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Ранг параконтактной структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p+1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг параконтактной структуры равен $2p+1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений, основанных на применении равенства

$$2\tilde{\Gamma}_{ij}^m = g^{km}\left(\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}\right) + \Omega_{ij}^m \times$$
$$\times (\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba},\ \Omega_{an}^n = \partial_n \Gamma_a^n),$$

убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},\ \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b,$$
$$\tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n,\ \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab} \partial_n \Gamma_b^n,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),\ \ \psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac},$$
$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi: TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Будем называть эндоморфизм ψ вторым структурным эндоморфизмом. Выполняются также следующие соотношения:

$$C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(X,Y),\ \ g(CX,Y) = C(X,Y).$$

Из условия $d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0$ следует, что на самом деле ненулевых компонент $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ меньше:

$$\tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n = 0 \text{ и } \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab}\partial_n \Gamma_b^n = 0.$$

Почти параконтактное метрическое многообразие M называется нормальным многообразием, если выполняется условие

$$N_{\varphi}^{(1)} = N_{\varphi} - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где

$$N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^{2}[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ.

Почти параконтактное метрическое многообразие называется пара-Кенмоцу многообразием, если выполняется следующее условие [16]:

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y = g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X.$$

Рассматривая последнее уравнение в адаптированных координатах, приходим к предложению 2.

Предложение 2. *Почти параконтактное метрическое многообразие является пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) внутренняя производная от первого структурного эндоморфизма равна нулю: $\nabla\varphi = 0$*;*

2) производная Ли от первого структурного эндоморфизма вдоль структурного векторного поля $\vec{\xi}$ *равна нулю:* $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$*;*

3) распределение D *многообразия* M *инволютивно;*

4) выполняется равенство $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Следующее предложение является непосредственным следствием предложения 1 применительно к пара-Кенмоцу многообразию.

Предложение 3. *Коэффициенты* $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ *связности Леви-Чивиты пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c}, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = -g_{ab}, \ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = \delta_{a}^{b},$$

где

$$\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Почти параконтактное метрическое многообразие M назовем неголономным пара-Кенмоцу многообразием, если выполняются следующие условия:

1) внутренняя производная от первого структурного эндоморфизма равна нулю: $\nabla\varphi = 0$;

2) производная Ли от первого структурного эндоморфизма φ вдоль структурного векторного поля $\vec{\xi}$ равна нулю: $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$;

3) выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Если распределение неголономного пара-Кенмоцу многообразия неинволютивно, то такое многообразие будем называть собственно неголономным пара-Кенмоцу многообразием.

Предложение 4. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ связности Леви-Чивиты неголономного пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c},\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba} - g_{ab},\ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = \delta_a^b + \psi_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad \psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}.$$

Теорема 1. *Почти параконтактное метрическое многообразие является неголономным пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y = (\omega(\varphi Y, X) + g(\varphi X, Y))\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi(X + \psi X).$$

Если распределение почти параконтактного метрического многообразия инволютивно, мы получаем характеристические равенства для пара-Кенмоцу многообразия.

Известно, что для пара-Кенмоцу многообразия выполняются соотношения

$$\tilde{\nabla}_X\vec{\xi} = X - \eta(X)\vec{\xi}, \tag{1}$$

$$(\tilde{\nabla}_X\eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{2}$$

$$\eta\big(\tilde{R}(X,Y)Z\big) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X), \qquad (3)$$

$$\tilde{R}(X,Y)\vec{\xi} = \eta(X)Y - \eta(Y)X. \qquad (4)$$

Пусть M — почти параконтактное метрическое многообразие. Назовем связность $D_X Y$, определяемую равенством

$$D_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)\psi X + \omega(X,Y)\vec{\xi},$$

связностью типа Леви-Чивиты.

Предложение 5. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -C_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{an}^b = C_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Предложение 5 для случая почти параконтактного метрического многообразия уточняется следующим образом:

Предложение 6. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -g_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{an}^b = \delta_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Предложение 7. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты неголономного пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -g_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{na}^b = \delta_a^b,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Опираясь на предложение 7, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Теорема 2. *Почти параконтактное метрическое многообразие является неголономным пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$(D_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X.$$

Используя теорему 2, можно показать, что равенства (1)—(4) останутся справедливыми для неголономного пара-Кенмоцу многообразия, если в них заменить производную $\widetilde{\nabla}_X$ на производную D_X.

Теорема 3. *Неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты.*

Доказательство. Найдем в адаптированных координатах необходимые для дальнейшего компоненты тензора кривизны K связности типа Леви-Чивиты. Имеем:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} - \delta^d_a g_{cb} + \delta^d_b g_{ca} + 2\omega_{ab}\delta^d_c,$$

$$K^n_{anc} = -g_{ca},\ K^a_{nbn} = \delta^a_b.$$

Здесь R^d_{abc} — компоненты тензора Схоутена [9]:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y],Z],$$

$$Q = 1 - P.$$

Пусть теперь $k(X,Y)$ — тензор Риччи, $\mathrm{r}(X,Z) = \mathrm{tr}(Y \to R(X,Y)Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(\mathrm{D})$ — тензор Схоутена — Риччи внутренней связности [2].

В адаптированных координатах получаем:

$$k_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2g_{ca} + 2\omega_{ac}.$$

Предположим, что неголономное пара-Кенмоцу многообразие является многообразием Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты. Тогда выполняется следующее равенство:

$$k_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2g_{ca} + 2\omega_{ac} = \mu g_{ca},$$

или

$$r_{ac} + 2mg_{ca} - \mu g_{ca} - 2g_{ca} = 2\omega_{ca}.$$

Отсюда в качестве следствия получаем:

$$r_{ac} - r_{ca} = 2\omega_{ca} - 2\omega_{ac} = 4\omega_{ca}.$$

Последнее равенство сравним с равенством

$$r_{ac} - r_{ca} = 4m\omega_{ca},$$

которое легко выводится из равенства

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

Отсюда следует, что при $m > 1$ неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты. В случае $m = 1$ получаем $k_{ac} = 0$, но $k_{nn} = 2$. Что и доказывает теорему.

Пример неголономного пара-Кенмоцу многообразия. Пусть $M = R^3$, (∂_α) $(\alpha = 1,2,3)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть далее

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3,\ \vec{e}_2 = \partial_2, \vec{e}_3 = \vec{\xi} = \partial_3,\ D = Span(\vec{e}_1, \partial_2).$$

Определим метрический тензор, полагая базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ортогональным и

$$g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = e^{2x^3},\ g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1.$$

Тем самым добиваемся выполнения равенства

$$L_{\vec{\xi}}\, g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Первый структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2,\ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1,\quad \varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = -x^2$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства $\nabla\varphi = 0$.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

3. *Букушева А.В.* К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу // Известия Алтайского государственного университета. 2021. №1 (117). С. 84—87.

4. *Галаев С.В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, №3. С. 551—555.

5. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

6. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

7. *Cappelletti-Montano B., Erken I.K., Murathan C.* Nullity conditions in paracontact geometry // Diff. Geom. Appl. 2012. Vol. 30. P. 665—693.

8. *Erken I.K., Murathan C.* A complete study of three-dimensional paracontact *k*-spaces // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2017. Vol. 14, №7. Art. №1750106.

9. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

10. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. New series. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

11. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

12. *Olszak Z.* The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para)contact metric structure // Publ. Inst. Math. Nouv. ser. 2013. Vol. 94 (108). P. 31—42.

13. *Sato I.* On a structure similar to the almost contact structure // Tensor. New series. 1976. Vol. 30. P. 219—224.

14. *Sinha B.B., Sai Prasad K.L.* A class of almost para contact metric manifolds // Bull. Cal. Math. Soc. 1995. Vol. 87. P. 307—312.

15. *Wełyczko J.* Slant curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds // Mediterr. J. Math. 2014. Vol. 11. P. 965—978.

16. *Zamkovoy S.* Canonical connections on paracontact manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom. 2009. Vol. 36. P. 37—60.

Для цитирования: *Букушева А.В.* О связностях с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 49—63. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-6.

MSC 2010: 53C17

A. V. Bukusheva
Saratov State University
83, Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-6

On connections with torsion on nonholonomic para-Kenmotsu manifolds

Submitted on April 30, 2023

The concept of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold is introduced. A nonholonomic para-Kenmotsu manifold is a natural generalization of a para-Kenmotsu manifold; the distribution of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold does not need to be involutive. Properly nonholonomic para-Kenmotsu manifolds are singled out, these are nonholonomic para-Kenmotsu manifolds with non-involutive distribution. On an almost (para-)contact metric manifold, we introduce a metric connection with torsion, which is called a connection of Levi-Civita type in this paper. In the case of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold, such a connection has a simpler structure than the Levi-Civita connection, and in some cases it turns out to be preferable from an applied point of view. A Levi-Civita type connection coincides with a Levi-Civita connection if and only if a nonholonomic para-Kenmotsu manifold reduces to a para-Kenmotsu manifold. It is proved that a proper nonholonomic para-Kenmotsu manifold cannot carry the structure of an Einstein manifold with respect to a connection of the Levi-Civita type.

Keywords: nonholonomic para-Kenmotsu manifold, Levi-Civita type connection, Einstein manifold, para-contact metric manifold

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling, 5, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. Tomsk State Univ. J. Math. Mech., 64, 5—14 (2020).

3. *Bukusheva, A.V.:* Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds. Izv. of Altai State Univ., 1 (117), 84—87 (2021).

4. *Galaev, S.V.:* Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure. Bulletin of Bashkir Univ., **21**:3, 551—555 (2016).

5. *Galaev, S.V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016).

6. *Galaev, S.V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform, **15**:3, 258—263 (2015).

7. *Cappelletti-Montano, B., Erken, K.I., Murathan, C.:* Nullity conditions in paracontact geometry. Differ. Geom. Appl., 30, 665—693 (2012).

8. *Erken, K.I., Murathan, C.:* A complete study of three-dimensional paracontact (k,μ,v)-spaces. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **14:**7, 1750106 (2017).

9. *Galaev, S.V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).

10. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor (N.S.), 29, 249—254 (1975).

11. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24, 93—103 (1972).

12. *Olszak, Z.:* The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para)contact metric structure. Publ. Inst. Math. Nouv. ser., **94**:108, 31—42 (2013).

13. *Sato, I.*: On a structure similar to the almost contact structure. Tensor (N.S.), 30, 219—224 (1976).

14. *Sinha, B.B., Sai Prasad, K.L.:* A class of almost paracontact metric manifolds. Bull. Cal. Math. Soc., 87, 307—312 (1995).

15. *Wełyczko, J.:* Slant curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. Mediterr. J. Math., 11, 965—978 (2014).

16. *Zamkovoy, S.:* Canonical connections on paracontact manifolds. Ann. Glob. Anal. Geom., 36, 37—60 (2009).

For citation: Bukusheva, A.V. On connections with torsion on nonholonomic para-Kenmotsu manifolds. DGMF, 54 (1), 49—63 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-6.