УДК 514.76

***А. В. Букушева*[1]**

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

bukusheva@list.ru

Допустимые симплектические структуры на распределениях и кораспределениях субримановых многообразий

На распределении и кораспределении многообразия с субримановой структурой контактного типа определяются продолженные почти контактные метрические структуры. Исследуются связи между допустимыми симплектическими структурами, порождаемыми соответствующими продолженными структурами.

Ключевые слова: субриманова структура контактного типа, распределение и кораспределение субримановой структуры, допустимые симплектические структуры.

Введение

Для случая почти контактного метрического многообразия в работе [6] на распределении D была определена геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения TM. Проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями). В ра-

---

Поступила в редакцию 26.05.2018 г.

боте [10] аналогичные конструкции были получены для кораспределения D^* почти контактного метрического многообразия. Кораспределение D^* образовано всеми допустимыми 1-формами $\left(\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda\left(\vec{\xi}\right)=0\right)$ и является нечетномерным аналогом кокасательного расслоения T^*M. Несмотря на то что при изучении геометрии кокасательного расслоения T^*M, как правило, используются те же методы, что и при изучении касательного расслоения TM, пространство кокасательного расслоения наделено канонической симплектической структурой [13], что является важным обстоятельством с точки зрения применения геометрии кокасательного расслоения в механике и физике. В той же мере существование на кораспределении D^* канонической допустимой симплектической структуры позволяет рассматривать D^* как фазовое пространство неголономной механической системы.

В настоящей работе исследуется субриманово многообразие контактного типа M, то есть гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой контактного типа $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,D\right)$. Так же, как и в случае контактного метрического многообразия на распределении и кораспределении субриманова многообразия определяются почти контактные метрические структуры. Исследуются некоторые связи между полученными структурами.

Почти контактная метрическая структура на распределении субриманова многообразия

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,D\right)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие соответственно ортогональные между собой распределения D и

$D^{\perp}$ и связанные соотношением $\eta\left(\vec{\xi}\right)=1$. Внутренней линейной связностью ∇ [1; 4—7] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla:\Gamma\left(D\right)\times\Gamma\left(D\right)\to\Gamma\left(D\right)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}}=f_1\nabla_{\vec{x}}+f_2\nabla_{\vec{y}}$, 2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y}=\left(\vec{x}f\right)\vec{y}+f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$, 3) $\nabla_{\vec{x}}\left(\vec{y}+\vec{z}\right)=\nabla_{\vec{x}}\vec{y}+\nabla_{\vec{x}}\vec{z}$, где $\Gamma\left(D\right)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению *D*). О другом подходе к определению связности, ассоциированной с гладким распределением, можно прочитать в [12].

Карту $K(x^{\alpha})$ (α, β, γ = 1,..., *n;* *a, b, c* = 1,..., *n*–1, *i, j, k* = 2*n* – 1) многообразия *M* будем называть адаптированной к распределению *D*, если $\partial_n=\vec{\xi}$ [2; 3; 8—11].

Пусть *P: TM*→*D* — проектор, определяемый разложением $TM=D\oplus D^{\perp}$, $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a)=\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение *D*: $D=span(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b=\Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$. Из равенств $\vec{e}_a=A_a^{a'}\vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'}=\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c=A_a^{a'}A_b^{b'}A_{c'}^c\Gamma_{a'b'}^{c'}+A_{c'}^c\vec{e}_aA_b^{c'}.$$

Кручением и кривизной внутренней связности назовем соответственно допустимые тензорные поля:

$$S\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\nabla_{\vec{x}}\vec{y}-\nabla_{\vec{y}}\vec{x}-P[\vec{x},\vec{y}],$$

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=\nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z}-\nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z}-\nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z}-P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

где $Q=I-P$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ носит название тензора Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc}=2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c}+2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Аналогом связности Леви-Чивита является внутренняя симметричная связность ∇, такая, что $\nabla g=0$, где g — допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно, что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right).$$

Тензорное поле t типа $(p,\ q)$, заданное на субримановом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η.

Пусть D — распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n-\Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b},\,\partial_n,\,\partial_{n+a})=(A_i)$$

определяют [9] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a,\Theta^n=dx^n+\Gamma^n_a dx^a,\Theta^{n+a}=dx^{n+a}+\Gamma^a_{bc}x^{n+c}dx^b)$$

— соответствующее поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения [9]:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a,\vec{\varepsilon}_b\right]=2\omega_{ba}\partial_n+x^{n+d}R^c_{bad}\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d} \partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c},$$

где R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах. Имеет место

Предложение 2 [9]. *Пусть* ∇ *— внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$. *Тогда для всех* $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^h\right]_{\vec{p}} = \left[\vec{x}, \vec{y}\right]^h - \left\{R\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\vec{p}\right\}^v,$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h\right]_{\vec{p}} = \left[\vec{x}, \vec{\xi}\right]^h + \left\{P\left(\vec{x}, \vec{p}\right)\right\}^v,$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^v\right] = \left(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}\right)^v, \left[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h\right] = \left[\vec{x}, \vec{\xi}\right]^v.$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Определим на многообразии M метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = g(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующее предложение.

Предложение 3 [9]. *Структура* $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ *является почти контактной метрической структурой.*

Почти контактная метрическая структура на кораспределении субриманова многообразия

Введем на кораспределении D^* субриманова многообразия структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}\left(x^\alpha, p_a\right)$ на многообразии D^*, где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Заданную сверхкарту также будем называть адаптированной.

Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$ и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma\left(D^*\right)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$ векторные поля $\vec{x}^h = x^a \vec{f}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где $\vec{f}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n + p_b \Gamma_{ac}^b \partial^c$, $\partial^a = \dfrac{\partial}{\partial p_a}$. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{f}_a, \vec{f}_b\right] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{bae}^c \partial^e,$$

$$\left[\vec{f}_a, \partial^b\right] = -\Gamma_{ac}^b \partial^c, \left[\vec{f}_a, \partial_n\right] = -p_b \partial_n \Gamma_{ac}^b \partial^n.$$

На тотальном пространстве D^* векторного расслоения $\left(D^*, \pi, M\right)$, где $\pi : D^* \to M$ — естественная проекция, таким образом возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = span(\vec{f}_a)$, $V = span(\partial^a)$. Определим на пространстве D^* метрический тензор $\tilde{G}$, полагая

$$\tilde{G}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{G}(\lambda^v, \mu^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ \tilde{G}(\partial_n, \partial_n) = 1,$$

$$\tilde{G}(\vec{x}^h, \mu^v) = \tilde{G}(\vec{x}^h, \partial_n) = \tilde{G}(\lambda^v, \partial_n) = 0,$$

и допустимую почти комплексную структуру $\tilde{J}$, таким образом, что $\tilde{J}\vec{x}^h = \lambda^v$, $\tilde{J}\lambda^v = -\vec{x}^h$, $\tilde{J}(\vec{u}) = \vec{0}$. Здесь $\vec{x} = x^a\vec{e}_a$, $\lambda_a = g_{ab}x^b$, $\mu_a = g_{ab}y^b$.

Непосредственным вычислением проверяется справедливость следующего предложения.

Предложение 4. *Система* $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, \tilde{J}, \tilde{G}, \tilde{D})$ *является почти контактной метрической структурой.*

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой.

Допустимые симплектические структуры на распределении D и кораспределении D^* субриманова многообразия M определим соответственно равенствами $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y})$, $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{G}(\vec{x}, J\vec{y})$.

Существуют интересные связи между продолженными структурами, определяемыми на D и D^*. В настоящей работе мы выделяем следующее утверждение.

Теорема. *Отображение* $\psi : D \to D^*$, *определяемое равенством* $\psi(\vec{x})(\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y})$, *является контактным симлектоморфизмом.*

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. №17 (214), вып. 40. 2015. С. 20—24.

2. *Букушева А.В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, №3. С. 247—251.

3. *Букушева А.В.* О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №15. С. 8—11.

4. *Букушева А.В.* Применение Wolfram Language для выделения специальных классов почти контактных метрических структур // Компьютерные науки и информационные технологии : матер. Междунар. науч. конф. Саратов, 2016. С. 105—107.

5. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №3. С. 17—22.

6. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. №4. С. 10—18.

7. *Галаев С.В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. №3. С. 15—23.

8. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

9. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №1. С. 25—34.

10. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138—147.

11. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №3 (59). С. 53—63.

12. *Манин Ю.И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., 1984.

13. *Паньженский В.И., Сухова О.В.* Почти эрмитовы структуры на касательном расслоении почти симплектического многообразия // Изв. вузов. Матем. 2007. №11. С. 75—78.

A. Bukusheva[1]

[1] *Saratov State University*

83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia

bukusheva@list.ru

Admissible symplectic structures on distributions and codistributions of sub-Riemannian manifolds

Submitted on May 26, 2018

Extended almost contact metric structures are defined on distribution and codistribution of manifold with sub-Riemannian structure of contact type. We investigate connections between admissible symplectic structures that are determined by the corresponding extended structures.

Keywords: sub-Riemannian structure of contact type, distribution and distribution of sub-Riemannian structure, admissible symplectic structures.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On geometry of the contact metric spaces with ϕ-connection. Belgorod State University. Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, **17**(214):40, 20—24 (2015) (in Russian).

2. *Bukusheva, A. V.:* Foliation on distribution with Finslerian metric. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **14**:3, 247—251 (2014) (in Russian).

3. *Bukusheva, A. V.:* On some classes of almost para-contact metric manifolds. Mathematics. Mechanic, 15, 8—11 (2013) (in Russian).

4. *Bukusheva, A. V.:* Usage Wolfram Language to obtain special classes of almost contact metric structures // Computer Science and Information Technology: Materials of the Intern. sci. Conf. Saratov: The publication. center. "Science", pp. 105—107 (2016) (in Russian).

5. *Bukusheva, A. V., Galaev S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. Izv. SaratovUniv. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **12**:3, 17—22 (2012) (in Russian).

6. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Connections on distributions and geodesic sprays. Russian Math. (Iz. VUZ), **57**:4, 7—13 (2013).

7. *Galaev, S. V.:* N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. Russian Math. (Iz. VUZ). **61**:3, 12—19 (2017).

8. *Galaev, S. V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016) (in Russian).

9. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by N-prolonged connection. Mathematical Notes of NEFU, **22**:1, 25—34 (2015) (in Russian).

10. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform, **17**:2, 138—147 (2017) (in Russian).

11. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii Sbornik, **17**:3(59), 53—63 (2016) (in Russian).

12. *Manin, Yu. I.:* Gauge fields and complex geometry. Nauka, Moscow (1984).

13. *Panzhensky, V. I., Sukhova O. V.:* Almost Hermitian structures on the tangent bundle of an almost symplectic manifold, Russian Math. (Iz. VUZ), **51**:11, 73—75 (2007).