УДК 514.75

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ЛИНИЮ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

О.О.Г у с е в а

(Калининградский государственный университет)

Построен канонический репер прямолинейной конгруэнции в трехмерном проективном пространстве P_3 с вырождающейся в линию фокальной поверхностью. Приведен пример такой конгруэнции ассоциированной с поверхностью.

Прямолинейной конгруэнцией называется двупараметрическое семейство L_2 прямых в трехмерном проективном пространстве P_3. Прямая $a \in L_2$ называется лучом конгруэнции L_2 .

Рассмотрим в P_3 репер $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Деривационные формулы этого репера имеют вид: $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha, \beta = \overline{0,3})$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства: $D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности: $\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$.

Поместим вершины A_1 и A_2 репера $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ на луч $a \in L_2$. Формы ω_i^0 и ω_i^3 являются структурными формами луча a . Примем формы ω_1^3 и ω_2^0 за базисные и обозначим

$$\omega_1^3 = \theta_1 \quad , \quad \omega_2^0 = \theta_2 \quad (\theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0) , \tag{I}$$

тогда

$$\omega_1^0 = a_1^1 \theta_1 + a_1^2 \theta_2 , \quad \omega_2^3 = a_2^1 \theta_1 + a_2^2 \theta_2 . \tag{2}$$

Возьмем на луче $a = [A_1 A_2]$ точку $F = x^1 A_1 + x^2 A_2$ и потребуем, чтобы она являлась фокусом данного луча. С учетом равенств (I) и (2), условие $dF \in [A_1 A_2]$ запишется в виде:

$$\begin{cases} x^1 (a_1^1 \theta_1 + a_1^2 \theta_2) + x^2 \theta_2 = 0, \\ x^1 \theta_1 + x^2 (a_2^1 \theta_1 + a_2^2 \theta_2) = 0 . \end{cases} \tag{3}$$

Исключая из (3) отношение $\theta_1 : \theta_2$, получим условие для определения фокусов луча a :

$$(x^1)^2 a_1^2 + (x^2)^2 a_2^1 + x^1 x^2 (a_1^2 a_2^1 - a_1^1 a_2^2 + 1) = 0 .$$

Вершины A_1 и A_2 помещаем в фокусы, тогда

$$a_1^2 = 0 \ , \ a_2^1 = 0 . \tag{4}$$

Форма $\omega_1^2 = b_1^1 \theta_1 + b_1^2 \theta_2$ становится главной. Потребуем, чтобы фокальная поверхность (A_1) вырождалась в линию, отсюда получим условие:

$$b_1^2 = 0 . \tag{5}$$

Система уравнений Пфаффа прямолинейной конгруэнции L_2 с учетом (4), (5) имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_1^0 = a_1^1 \theta_1 , & \omega_1^2 = b_1^1 \theta_1 , \\ \omega_2^3 = a_2^2 \theta_2 , & \omega_2^1 = b_2^1 \theta_1 + b_2^2 \theta_2 , \end{cases} \tag{6}$$

причем $a_1^1 a_2^2 \neq 1$.

Потребуем, чтобы точка A_3 лежала на касательной к линии (A_1) , тогда система (6) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \omega_1^0 = 0 , & \omega_2^3 = a_2^2 \theta_2 , & \omega_3^0 = c_1^1 \theta_1 + c_2^2 \theta_2 , \\ \omega_1^2 = 0 , & \omega_2^1 = b_2^1 \theta_1 + b_2^2 \theta_2 , & \omega_3^2 = l_1^1 \theta_1 + l_2^2 \theta_2 . \end{cases} \tag{7}$$

Продолжая уравнения $\omega_1^0 = 0 , \omega_1^2 = 0$, получим:

$$c_2^2 = 0 \ , \quad l_2^2 = 0 . \tag{8}$$

С учетом (8) и замены

$$a_2^2 = a^2 , \ b_2^1 = b^1 , \ b_2^2 = b^2 , \ c_1^1 = c^1 , \ l_1^1 = l_1$$

система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \omega_1^0 = 0 , & \omega_2^3 = a^2 \theta_2 , & \omega_3^0 = c^1 \theta_1 , \\ \omega_1^2 = 0 . & \omega_2^1 = b^1 \theta_1 + b^2 \theta_2 , & \omega_3^2 = l^1 \theta_1 . \end{cases} \tag{9}$$

Вершину A_0 , находящуюся на касательной к линии $\theta_1 = 0$ на поверхности (A_2) , поместим во втором фокусе. Система уравнений (9) запишется в виде:

$$\begin{cases} \omega_1^0 = 0 , & \omega_2^1 = b^1 \theta_1 , & \omega_0^3 = k^2 \theta_2 , \\ \omega_1^2 = 0 , & \omega_3^0 = c^1 \theta_1 , & \omega_0^1 = p^2 \theta_2 , \\ \omega_2^3 = 0 , & \omega_3^2 = l^1 \theta_1 , & \omega_0^2 = t^1 \theta_1 + t^2 \theta_2 . \end{cases} \tag{IO}$$

Пусть вершина A_3 - точка пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) и касательной к линии (A_1) . Выполняя нормировку $b^1 = 1 , \ k^2 = 1 , \ t^1 = 1$, получим окончательный вид системы (IO):

$$\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 ,$$

$$\begin{cases} \omega_0^1 = 0 , & \omega_3^0 = c^1 \theta_1 , & \omega_0^2 = \theta_1 + t^2 \theta_2 , \\ \omega_1^0 = 0 , & \omega_3^2 = l^1 \theta_1 , & \omega_3^1 = -t^2 \theta_1 + q^2 \theta_2 , \\ \omega_1^2 = 0 , & \omega_0^3 = \theta_2 , & 2\omega_0^0 = \omega_3^3 - \omega_2^2 = 0 , \\ \omega_2^3 = 0 , & \omega_1^3 = \theta_1 , & 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = 0 , \\ \omega_2^1 = \theta_1 , & \omega_2^0 = \theta_2 , & \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 . \end{cases} \tag{II}$$

Таким образом, репер полностью канонизирован. При построении канонического репера были исключены случаи: 1) поверхность (A_2) является торсом; 2) поверхность (A_0) вырождается в линию; 3) касательная плоскость к поверхности (A_0) содержит точку A_1. Назовем такой класс прямолинейных конгруэнций с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью конгруэнцией V. Из замыкания системы (II) следует (см., например, [1, с.62], [2, с.21]).

Теорема 1. Конгруэнция V существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Построим пример прямолинейной конгруэнции с фокальной линией, ассоциированной с поверхностью. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 гладкую поверхность S, не являющуюся торсом. Отнесем поверхность S к реперу первого порядка $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 – текущая точка поверхности, вершины A_1 и A_2 расположены в касательной плоскости к поверхности S в этой точке. Система уравнений Пфаффа такой поверхности S приведена в работе [3, с.4 – 7].

Пусть точка Φ – фокус луча A_0A_3. Потребуем, чтобы поверхность (A_3) вырождалась в линию и чтобы $\Phi \equiv A_3$, тогда получим:

$$\omega_3^0 = \mu\,\omega_2^0, \quad \omega_1^0 = \lambda\,\omega_2^0 \quad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0). \qquad (12)$$

Назовем данную конгруэнцию директрис Вильчинского $[A_0A_3]$ с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью конгруэнцией $\widetilde{V}$. Замыкая систему уравнений поверхности S, убеждаемся в справедливости утверждения:

Теорема 2. Конгруэнция $\widetilde{V}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

2. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980.

3. Малаховский В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

УДК 514.75

ЛИНИИ ПСЕВДОФОКУСОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_2 В E_4

Н.И.Гусева

(Московский государственный педагогический университет)

1. Основные сведения. В расширенном евклидовом пространстве E_4 рассматривается подвижной репер $R=\{A,\vec{e}_i\}$ $(i,j=\overline{1,4})$, деривационные уравнения которого

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \qquad (1.1)$$

По одинаковым индексам разных уровней производится суммирование в соответствующих пределах.

В каждой точке A пространства по определенному закону зададим 2-плоскость $\Delta_2(A)$. При этом говорят, что в E_4 задано распределение Δ_2. Совместим вершину репера с рассматриваемой точкой, векторы $\vec{e}_a$ $(a,b=1,2)$ расположим в 2-плоскости распределения $\Delta_2(A)$, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta=3,4)$ – в ортогональной плоскости $\Delta_2^{\perp}(A)$. Такое расположение векторов репера определяет соотношения

$$\omega_\alpha^a = -\omega_a^\alpha. \qquad (1.2)$$

Интегральными линиями распределения называют линии, которые в каждой своей точке касаются соответствующей 2-плоскости распределения. Вдоль таких линий выполняются условия

$$\omega^\alpha = 0. \qquad (1.3)$$

Дифференциальные уравнения распределения в этом случае выглядят так:

$$\omega_a^\alpha = \Gamma_{ai}^\alpha\, \omega^i. \qquad (1.4)$$

Компоненты $\{\Gamma_{ab}^\alpha\}$ образуют тензор, в общем случае несимметричный по нижним индексам. Условия

$$\Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{12}^\alpha = 0 \qquad (1.5)$$

называют условиями интегрируемости распределения. Если они выполнены, то все интегральные кривые, проходящие через одну точку, располагаются в окрестности этой точки на двумерной поверхности. Такое распределение называют голономным.

2. Прямые псевдофокусов сетей распределения. Сетью линий распределения Δ_2 называется пара семейств интегральных линий таких, что через каждую точку A пространства E_4 проходит по одной линии каждого семейства, причем векторы, касательные