УДК 514.75

А. В. Вялова

(Калининградский государственный технический университет)

ПОДНОРМАЛИЗАЦИЯ ТОЧЕЧНО-ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На точечно-плоскостной поверхности S_{h+r} в n-мерном проективном пространстве в предположении существования двух относительных инвариантов строятся охваты компонент оснащающего квазитензора. Дано определение поднормализации точечно-плоскостной поверхности. Поднормализация порождается композиционным оснащением, и наоборот: доказывается, что поднормализация порождает композиционное оснащение.

***Ключевые слова*:** проективное пространство, точечно-плоскостная поверхность, композиционное оснащение, поднормализация поверхности, оснащающий квазитензор поверхности.

В работе индексы принимают следующие серии значений:

$$a,\ldots=\overline{1,h};\quad i,\ldots=\overline{h+1,m};\quad \alpha,\ldots=\overline{m+1,n};\quad u,\ldots=\overline{1,m}.$$

В n-мерном проективном пространстве P_n точечно-плоскостная поверхность S_{h+r} представляется вырожденным многообразием троек (A,L_h,T_m), причем точка A $(A\in L_h\subset T_m)$ и касательная плоскость T_m ($m = h + r$, $n < m + hr$ [1]) описывают m-мерные семейства, а образующая L_h — r-мерное семейство. Поверхность S_{h+r} задается уравнениями [1]:

$$\omega^\alpha=0,\ \ \omega_a^i=\Lambda_{aj}^i\omega^j,\ \ \omega_a^\alpha=\Lambda_{ai}^\alpha\omega^i,\ \ \omega_i^\alpha=\Lambda_{ia}^\alpha\omega^a+\Lambda_{ij}^\alpha\omega^j,$$

где совокупность функций $\Lambda^1=\{\Lambda_{aj}^i,\Lambda_{ai}^\alpha=\Lambda_{ia}^\alpha,\Lambda_{ij}^\alpha\}$ составляет фундаментальный объект 1-го порядка поверхности. Компоненты объекта Λ^1 удовлетворяют соотношениям $\Lambda^{\alpha}_{[ij]} = 0$ и системе дифференциальных уравнений [2]:

$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{ai} = \Lambda^{\alpha}_{aiu}\omega^{u}, \quad \Delta\Lambda^{i}_{aj} + \Lambda^{\alpha}_{aj}\omega^{i}_{\alpha} - \delta^{i}_{j}\omega_{a} = \Lambda^{i}_{aju}\omega^{u},$$
$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{ij} - \Lambda^{\alpha}_{ai}\omega^{a}_{j} - \Lambda^{\alpha}_{aj}\omega^{a}_{i} = \Lambda^{\alpha}_{iju}\omega^{u}, \qquad (1)$$

где тензорный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{ai} = d\,\Lambda^{\alpha}_{ai} - \Lambda^{\alpha}_{bi}\omega^{b}_{a} - \Lambda^{\alpha}_{aj}\omega^{j}_{i} + \Lambda^{\beta}_{ai}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

Утверждение. *Фундаментальный объект первого порядка Λ^1 поверхности S_{h+r} образует квазитензор, содержащий простейший и простой тензоры: $\{\Lambda^{\alpha}_{ai}\},\{\Lambda^{\alpha}_{ij},\Lambda^{\alpha}_{ai}\}$.*

Замечание. Если тензор $\Lambda^{\alpha}_{ai} = \Lambda^{\alpha}_{ia}$ обращается в нуль, то получаем особый случай плоскостной поверхности — тангенциально вырожденную поверхность S^{0}_{h+r}, рассматриваемую как (*m*–*h*)-мерное семейство пар плоскостей (L_h, T_m). Если тензор $\{\Lambda^{\alpha}_{ij},\Lambda^{\alpha}_{ai}\}$ обращается в нуль, то плоскость $T_m = [A, A_a, A_i]$ фиксируется и получается (*m*–*h*)-мерное семейство плоскостей L_h в фиксированной плоскости T_m, иначе говоря, конгруэнция *h*-плоскостей в абсолютно инвариантном подпространстве T_m пространства P_n.

Предположим [3], что существует нетривиальный относительный инвариант $I = I(\Lambda^{\alpha}_{ai})$. Дифференциальное уравнение для любого относительного инварианта имеет вид:

$$dI = I(\lambda\omega^{a}_{a} + \mu\omega^{i}_{i} + \nu\omega^{\alpha}_{\alpha}) + \tilde{I}_{u}\omega^{u}, \qquad (2)$$

где λ, μ, ν — некоторые коэффициенты.

Присоединим к плоскостной поверхности подобъект 1-го порядка $\{V^{ai}_{\alpha}\}$, компоненты которого являются частными производными логарифма инварианта по компонентам фундаментального подобъекта Λ^{α}_{ai}:

$$V^{ai}_{\alpha} = \frac{\partial\, ln\, I}{\partial\, \Lambda^{\alpha}_{ai}}. \qquad (3)$$

Этот объект будем называть обращенным подобъектом 1-го порядка точечно-плоскостной поверхности S_{h+r}. Из (3) с учетом дифференциальных уравнений (1_1) следует:

$$d\ln I = V^{ai}_{\alpha} d\Lambda^{\alpha}_{ai} = V^{ai}_{\alpha}(\Lambda^{\alpha}_{bi}\omega^{b}_{a} + \Lambda^{\alpha}_{aj}\omega^{j}_{i} - \Lambda^{\beta}_{ai}\omega^{\alpha}_{\beta} + \Lambda^{\alpha}_{aiu}\omega^{u}) = V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{bi}\omega^{b}_{a} +$$

$$+V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{aj}\omega^{j}_{i} - V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{ai}\omega^{\alpha}_{\beta} + V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{aiu}\omega^{u}.$$

Сопоставляя полученное с уравнениями (2), имеем

$$V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{bi} = \lambda\delta^{a}_{b}, \quad V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{aj} = \mu\delta^{i}_{j}, \quad V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{ai} = -\nu\delta^{\beta}_{\alpha}. \qquad (4)$$

Сворачивая (4) по индексам a и b, i и j, α и β, получим

$$V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai} = \lambda h, \quad V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai} = \mu r, \quad V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai} = -\nu(n-m),$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{h}V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai}, \; \mu = \frac{1}{r}V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai}, \; \nu = -\frac{1}{n-m}V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai}.$$

Пусть $V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ai} = hr(n-m)$, тогда $\lambda = r(n-m)$, $\mu = h(n-m)$, $\nu = -hr$. Следовательно, уравнение (2) для относительного инварианта I принимает вид:

$$d\ln I = r(n-m)\omega^{a}_{a} + h(n-m)\omega^{i}_{i} - hr\omega^{\alpha}_{\alpha} + \tilde{I}_{u}\omega^{u}.$$

Компоненты обращенного подобъекта V^{ai}_{α} связаны с компонентами подобъекта Λ^{α}_{ai} соотношениями:

$$V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{bi} = r(n-m)\delta^{a}_{b}, V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{aj} = h(n-m)\delta^{i}_{j}, V^{ai}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{ai} = hr\delta^{\beta}_{\alpha}. \quad (5)$$

Дифференциальные сравнения для компонент V^{ai}_{α} имеют вид:

$$\Delta V^{ai}_{\alpha} \equiv 0 (mod\, \omega^{u}).$$

Таким образом, обращенный подобъект 1-го порядка является тензором.

Производится композиционное оснащение точечно-плоскостной поверхности S_{h+r}, которое состоит в присоединении к каждой точке поверхности трех плоскостей [2]: 1) $P_{h-1} : A \oplus P_{h-1} = L_h$; 2) $P_{m-h-1} : L_h \oplus P_{m-h-1} = T_m$; 3) $P_{n-m-1} : \; T_m \oplus P_{n-m-1} = P_n$, — проективно дополняющих соответственно точку до образующей, образующую до касательной плоскости и касательную плоскость до объемлющего пространства.

Указанные плоскости задаются совокупностями точек:

$$C_a = A_a + \lambda_a A,\ C_i = A_i + \lambda_i^a A_a + \lambda_i A,\ C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A,$$

где объект $\lambda = \{\lambda_u, \lambda_i^a, \lambda_\alpha^u, \lambda_\alpha\}$ является оснащающим квазитензором поверхности S_{h+r} и удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{au}\omega^u,\ \Delta\lambda_i^a + \omega_i^a = \lambda_{iu}^a\omega^u,\ \Delta\lambda_i + \lambda_i^a\omega_a + \omega_i = \lambda_{iu}\omega^u,$$
$$\Delta\lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha u}^i\omega^u,\ \Delta\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^i\omega_i^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha u}^a\omega^u, \tag{6}$$
$$\Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \lambda_\alpha^i\omega_i + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha u}\omega^u.$$

Найдены продолжения дифференциальных уравнений для компонент объекта λ. Выпишем дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω^u для нужных нам в дальнейшем пфаффовых производных подобъектов $\{\lambda_i^a\}$ и $\{\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a\}$:

$$\Delta\lambda_{ij}^a - \lambda_{ib}^a\omega_j^b + \lambda_i^b(\Lambda_{bj}^\alpha\omega_\alpha^a + \Lambda_{bj}^k\omega_k^a) - \lambda_k^a(\Lambda_{ij}^\alpha\omega_\alpha^k + \Lambda_{bj}^k\omega_i^b) + \lambda_j^a\omega_i + \Lambda_{ij}^\alpha\omega_\alpha^a \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda_{ib}^a - \lambda_j^a\Lambda_{bi}^\alpha\omega_\alpha^j - \delta_b^a\lambda_i^c\omega_c - \delta_b^a\omega_i + \Lambda_{bi}^\alpha\omega_\alpha^a \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda_{\alpha a}^i + \lambda_\alpha^j\Lambda_{ja}^\beta\omega_\beta^i + \lambda_\beta^i\Lambda_{ja}^\beta\omega_\alpha^j \equiv 0, \tag{7}$$
$$\Delta\lambda_{\alpha j}^i - \lambda_{\alpha a}^i\omega_j^a + \lambda_\alpha^k\Lambda_{kj}^\beta\omega_\beta^i - \lambda_\alpha^k\Lambda_{bj}^i\omega_k^b + (\lambda_\beta^i\Lambda_{aj}^\beta - \Lambda_{aj}^i)\omega_\alpha^a +$$
$$+\lambda_\beta^i\Lambda_{jk}^\beta\omega_\alpha^k - \delta_j^i\left(\lambda_\alpha^k\omega_k + \omega_\alpha\right) \equiv 0,$$
$$\Delta\lambda_{\alpha b}^a + \lambda_{\alpha b}^i\omega_i^a + \lambda_\beta^a\Lambda_{ib}^\beta\omega_\alpha^i + \lambda_\alpha^i\Lambda_{ib}^\beta\omega_\beta^a - \delta_b^a(\lambda_\alpha^i\omega_i + \lambda_\alpha^c\omega_c + \omega_\alpha) \equiv 0.$$

Построены охваты компонент двух простейших подквазитензоров $\{\lambda_a\}, \{\lambda_\alpha^i\}$ с помощью фундаментального объекта и обращенного подобъекта и простых подквазитензоров $\{\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, $\{\lambda_i^a, \lambda_i\}$ в предположении существования охвата компонент 3-го простейшего подквазитензора $\{\lambda_i^a\}$.

1. Охватим объект λ_a, определяющий оснащающую плоскость P_{h-1}. Для этого свернем уравнения (1_2) по индексам i и j и разделим обе части на r:

$$\frac{1}{r}\Delta\Lambda^i_{ai}+\frac{1}{r}\Lambda^\alpha_{ai}\omega^i_\alpha-\omega_a=\frac{1}{r}\Lambda^i_{aiu}\omega^u\,. \qquad (8)$$

Для выделения форм ω^i_α из уравнений (8) вернемся к (1_2) и умножим обе его части на V^{aj}_β:

$$V^{aj}_\beta\Delta\Lambda^i_{aj}+V^{aj}_\beta\Lambda^\alpha_{aj}\omega^i_\alpha-V^{aj}_\beta\delta^i_j\omega_a=V^{aj}_\beta\Lambda^i_{aju}\omega^u.$$

Воспользуемся сверткой (5_3), учитывая, что V^{aj}_β — тензор, и разделим обе части уравнений на hr:

$$\frac{1}{hr}\Delta(\Lambda^i_{aj}V^{aj}_\beta)-\frac{1}{hr}V^{ai}_\beta\omega_a+\omega^i_\beta=\frac{1}{hr}V^{aj}_\beta\Lambda^i_{aju}\omega^u.$$

Введем обозначения: $\frac{1}{hr}\Lambda^i_{aj}V^{aj}_\beta=t^i_\beta$, тогда последние уравнения можно переписать в виде:

$$\Delta t^i_\beta-\frac{1}{hr}V^{ai}_\beta\omega_a+\omega^i_\beta=\frac{1}{hr}V^{aj}_\beta\Lambda^i_{aju}\omega^u. \qquad (9)$$

Выражая из (9) формы ω^i_α и подставляя их в (8), получим:

$$\frac{1}{r}\Delta\Lambda^i_{ai}-\frac{1}{r}\Lambda^\alpha_{ai}(\Delta t^i_\alpha-\frac{1}{hr}V^{bi}_\alpha\omega_b)-\omega_a=\frac{1}{r}(\Lambda^i_{aiu}-\frac{1}{hr}V^{bj}_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^i_{bju})\omega^u.$$

Приводя подобные слагаемые при формах ω_a и используя свертку (5_1), находим:

$$\frac{1}{r}\Delta(\Lambda^i_{ai}-\Lambda^\alpha_{ai}t^i_\alpha)+\frac{n-m-hr}{hr}\omega_a=\frac{1}{r}(\Lambda^i_{aiu}-\frac{1}{hr}V^{bj}_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^i_{bju})\omega^u.$$

Домножая обе части последних уравнений на $\frac{hr}{n-m-hr}$, имеем

$$\frac{h}{n-m-hr}\Delta(\Lambda^i_{ai}-\Lambda^\alpha_{ai}t^i_\alpha)+\omega_a=\frac{h}{n-m-hr}(\Lambda^i_{aiu}-\frac{1}{hr}V^{bj}_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^i_{bju})\omega^u. \qquad (10)$$

Введем обозначения:

$$l_a=\frac{h}{n-m-hr}(\Lambda^i_{ai}-\Lambda^\alpha_{ai}t^i_\alpha),\quad l_{au}=\frac{h}{n-m-hr}(\Lambda^i_{aiu}-\frac{1}{hr}V^{bj}_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^i_{bju}). \qquad (11)$$

Окончательно дифференциальные уравнения (10) примут вид: $\Delta l_a + \omega_a = l_{au}\omega^u$. Компоненты квазитензора (11), в которых используются обозначения t^i_α, удовлетворяют уравнениям (6_1), поэтому можно положить $l_a = \lambda_a$.

2. Охватим объект λ^i_α. В уравнения (9) подставим выражения форм $\omega_a = -\Delta l_a + l_{au}\omega^u$:

$$\Delta\left(t^i_\alpha + \frac{1}{hr}V^{ai}_\alpha l_a\right) + \omega^i_\alpha = \frac{1}{hr}\left(V^{aj}_\alpha \Lambda^i_{aju} + V^{ai}_\alpha l_{au}\right)\omega^u. \qquad (12)$$

Введем обозначения:

$$l^i_\alpha = t^i_\alpha + \frac{1}{hr}V^{ai}_\alpha l_a, \qquad l^i_{\alpha u} = \frac{1}{hr}\left(V^{aj}_\alpha \Lambda^i_{aju} + V^{ai}_\alpha l_{au}\right). \qquad (13)$$

Уравнения (12) с учетом обозначений (13) примут вид: $\Delta l^i_\alpha + \omega^i_\alpha = l^i_{\alpha u}\omega^u$. Величины (13) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6_4), поэтому можно положить: $\lambda^i_\alpha = l^i_\alpha$, $\lambda^i_{\alpha u} = l^i_{\alpha u}$. Квазитензор λ^i_α, определяющий плоскость $P_{n-m+h} = P_{n-m-1} \oplus L_h$, охвачен.

Предположим, что простейший квазитензор $\{\lambda^a_i\}$, определяющий плоскость $P_{m-h-1} = P_{m-h} \oplus A$, охвачен, то есть $\lambda^a_i = l^a_i$, $\lambda^a_{iu} = l^a_{iu}$ и для l^a_i, l^a_{iu} выполняются уравнения (6_2, $7_{1,2}$). В предположении существования данного охвата построим следующее.

а) Охват объекта $\{\lambda^i_\alpha, \lambda^a_\alpha\}$, определяющего нормаль 1-го рода в смысле А. П. Нордена $P_{n-m} = P_{n-m-1} \oplus A$. Для этого осталось охватить величины λ^a_α, так как $\lambda^i_\alpha = l^i_\alpha$. К дифференциальным сравнениям (7_1) для пфаффовых производных l^a_{ij} добавим и вычтем слагаемое $l^b_j \Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha$:

$$\Delta l^a_{ij} - l^a_{ib}\omega^b_j + l^b_i \Lambda^k_{bj}\omega^a_k - l^a_k \Lambda^\alpha_{ij}\omega^k_\alpha + l^a_k \Lambda^k_{bj}\omega^b_i + l^a_j\omega_i - l^b_j \Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha + T^\alpha_{ij}\omega^a_\alpha = l^a_{iju}\omega^u$$

$$(T^\alpha_{ij} = l^b_i \Lambda^\alpha_{bj} + \Lambda^\alpha_{ij} + l^b_j \Lambda^\alpha_{bi}). \qquad (14)$$

Объект T^{α}_{ij} с симметричными по нижним индексам компонентами является тензором, так как он удовлетворяет сравнениям $\Delta T^{\alpha}_{ij} \equiv 0 \ (mod\, \omega^{u})$. Обратим тензор T^{α}_{ij}. В предположении, что существует инвариант $J = J(T^{\alpha}_{ij})$, присоединим к поверхности S_{h+r} подобъект $\perp^{ij}_{\alpha} = \dfrac{\partial \ln J}{\partial T^{\alpha}_{ij}}$. Компоненты объекта T^{α}_{ij} связаны с компонентами обращенного объекта $\perp^{ij}_{\alpha}$ соотношениями:

$$\perp^{ij}_{\alpha} T^{\alpha}_{kj} = (n-m)\delta^{i}_{k}, \ \ \perp^{ij}_{\alpha} T^{\alpha}_{ik} = (n-m)\delta^{j}_{k}, \ \ \perp^{ij}_{\alpha} T^{\beta}_{ij} = r\delta^{\beta}_{\alpha}. \quad (15)$$

Обращенный объект $\perp^{ij}_{\alpha}$ является тензором, так как $\Delta \perp^{ij}_{\alpha} \equiv 0$.

Домножим обе части сравнений (7_2) для пфаффовых производных l^{a}_{ib} на функции l^{b}_{j}:

$$l^{b}_{j}\Delta l^{a}_{ib} - l^{a}_{k} l^{b}_{j} \Lambda^{\alpha}_{bi}\omega^{k}_{\alpha} - l^{a}_{j} l^{b}_{i}\omega_{b} - l^{a}_{j}\omega_{i} + \Lambda^{\alpha}_{bi} l^{b}_{j}\omega^{a}_{\alpha} = l^{b}_{j} l^{a}_{ibu}\omega^{u}. \quad (16)$$

В сравнения (14) подставим выражение для $\Lambda^{\alpha}_{bi} l^{b}_{j}\omega^{a}_{\alpha}$ из сравнений (16):

$$\Delta(l^{a}_{ij} + l^{a}_{ib} l^{b}_{j} - l^{b}_{i}\Lambda^{k}_{bj} l^{a}_{k} + T^{\alpha}_{ij} l^{a}_{k} l^{k}_{\alpha}) + T^{\alpha}_{ij}(l^{k}_{\alpha}\omega^{a}_{k} + \omega^{a}_{\alpha}) = (l^{a}_{ibu} l^{b}_{j} + l^{a}_{iju})\omega^{u}.$$

Полученные уравнения домножим на обращенный объект $\perp^{ij}_{\beta}$ и воспользуемся сверткой (15_3):

$$\perp^{ij}_{\beta} \Delta(l^{a}_{ij} + l^{a}_{ib} l^{b}_{j} - l^{b}_{i}\Lambda^{k}_{bj} l^{a}_{k} + T^{\alpha}_{ij} l^{a}_{k} l^{k}_{\alpha}) + r(l^{k}_{\beta}\omega^{a}_{k} + \omega^{a}_{\beta}) = \perp^{ij}_{\beta}(l^{a}_{ibu} l^{b}_{j} + l^{a}_{iju})\omega^{u}.$$

Разделим обе части на r:

$$\Delta\Big[\frac{\perp^{ij}_{\alpha}}{r}(l^{a}_{ij} + l^{a}_{ib} l^{b}_{j} - l^{b}_{i}\Lambda^{k}_{bj} l^{a}_{k}) + l^{a}_{k} l^{k}_{\alpha}\Big] + l^{i}_{\alpha}\omega^{a}_{i} + \omega^{a}_{\alpha} = \frac{\perp^{ij}_{\alpha}}{r}(l^{a}_{ibu} l^{b}_{j} + l^{a}_{iju})\omega^{u}$$

и введем обозначения:

$$l^{a}_{\alpha} = \frac{1}{r}\perp^{ij}_{\alpha}(l^{a}_{ij} + l^{a}_{ib} l^{b}_{j} - l^{b}_{i}\Lambda^{k}_{bj} l^{a}_{k}) + l^{a}_{k} l^{k}_{\alpha}, \ \ l^{a}_{\alpha u} = \frac{1}{r}\perp^{ij}_{\alpha}(l^{a}_{ibu} l^{b}_{j} + l^{a}_{iju}).$$

С учетом обозначений последние уравнения примут вид: $\Delta l^{a}_{\alpha} + l^{i}_{\alpha}\omega^{a}_{i} + \omega^{a}_{\alpha} = l^{a}_{\alpha u}\omega^{u}$. Так как полученные сравнения аналогичны (6_5), то можно положить $\lambda^a_\alpha = l^a_\alpha,\ \lambda^a_{\alpha u} = l^a_{\alpha u}$. Таким образом, квазитензор $\{\lambda^i_\alpha, \lambda^a_\alpha\}$ охвачен.

б) Охватим полувнутренним образом объект $\{\lambda^a_i, \lambda_i\}$, определяющий оснащающую плоскость P_{m-h-1}, то есть охватим величины λ_i, так как квазитензор λ^a_i предполагается охваченым. Свернем дифференциальные уравнения (7_2) для пфаффовых производных l^a_{ib} по индексам *a* и *b*:

$$\Delta l^a_{ia} - l^a_j \Lambda^\alpha_{ai}\omega^j_\alpha + \Lambda^\alpha_{ai}\omega^a_\alpha - h(l^a_i\omega_a + \omega_i) \equiv 0.$$

Подставляя вместо форм $\omega^i_\alpha,\ \omega^a_\alpha$ их выражения из ($6_{4,5}$), получим:

$$\Delta l^a_{ia} + l^a_j \Lambda^\alpha_{ai}\Delta l^j_\alpha - \Lambda^\alpha_{ai}(\Delta l^a_\alpha + l^j_\alpha\omega^a_j) - h(l^a_i\omega_a + \omega_i) \equiv 0.$$

Заменяя формы ω^a_j на их выражения из (6_3) и умножая обе части на $(-\frac{1}{h})$, найдем:

$$-\frac{1}{h}\Delta(l^a_{ia} - \Lambda^\alpha_{ai}(l^a_\alpha - l^a_j l^j_\alpha)) + l^a_i\omega_a + \omega_i \equiv 0.$$

Введем обозначение: $l_i = -\frac{1}{h}(l^a_{ia} - \Lambda^\alpha_{ai}l^a_\alpha + \Lambda^\alpha_{ai}l^a_j l^j_\alpha)$. Учитывая введенные обозначения, получим дифференциальные сравнения: $\Delta l_i + l^a_i\omega_a + \omega_i \equiv 0$. Сопоставляя их с уравнениями (6_3), положим $\lambda_i = l_i$. Таким образом, получили охват величин λ_i.

в) Построим охват квазитензора $\{\lambda^i_\alpha, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$, задающего оснащающую плоскость P_{n-m-1}. Охватим величины λ_α, так как $\lambda^i_\alpha = l^i_\alpha,\ \lambda^a_\alpha = l^a_\alpha$. Свернем дифференциальные уравнения (7_5) для пфаффовых производных $l^a_{\alpha b}$ по индексам *a* и *b*, затем умножим их на $(-\frac{1}{h})$:

$$-\frac{1}{h}(\Delta l^a_{\alpha a} + \Lambda^\beta_{ia}(l^a_\beta\omega^i_\alpha + l^i_\alpha\omega^a_\beta) + l^i_{\alpha a}\omega^a_i) + l^i_\alpha\omega_i + \lambda^c_\alpha\omega_c + \omega_\alpha \equiv 0.$$

Занося часть слагаемых под знак дифференциального оператора Δ и воспользовавшись для этого уравнениями ($6_{4,5}$) и сравнениями (7_3), получим сравнения

$$-\frac{1}{h}\Delta(l^a_{\alpha a}+l^i_{\alpha a}l^a_i+\Lambda^\beta_{ia}(l^a_\beta l^i_\alpha-l^i_\alpha l^j_\beta l^a_j))+l^i_\alpha\omega_i+\lambda^c_\alpha\omega_c+\omega_\alpha\equiv 0,$$

аналогичные (6_6), если ввести обозначения:

$$l_\alpha=-\frac{1}{h}(\Delta l^a_{\alpha a}+l^i_{\alpha a}l^a_i+\Lambda^\beta_{ia}(l^a_\beta l^i_\alpha-l^i_\alpha l^j_\beta l^a_j)).$$

Замечание. Иной охват величин λ_α можно получить, если рассматривать сравнения (7_4) для пфаффовых производных $\lambda^i_{\alpha j}$ компонент оснащающего квазитензора λ^i_α:

$$l_\alpha=-\frac{1}{m}(l^a_{\alpha a}+l^i_{\alpha i}+\Lambda^i_{ai}l^a_\alpha-\Lambda^\beta_{ai}(l^a_\beta l^i_\alpha+l^a_\alpha l^i_\beta)-l^i_\beta l^j_\alpha\Lambda^\beta_{ij}).$$

Таким образом, компоненты простейших квазитензоров $\{\lambda_a\},\{\lambda^i_\alpha\}$ удалось охватить внутренним образом в предположении существования инварианта *J*:

$$\lambda_a=\frac{h}{n-m-hr}(\Lambda^i_{ai}-\frac{1}{hr}\Lambda^i_{bj}V^{bj}_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}),\ \lambda^i_\alpha=\frac{1}{hr}(\Lambda^i_{aj}V^{aj}_\alpha+V^{ai}_\alpha\lambda_a).\quad (17)$$

С помощью поля квазитензора λ^a_i при дополнительном использовании инварианта *J* построены охваты остальных компонент квазитензора λ по формулам:

$$\lambda^a_\alpha=\frac{1}{r}\perp^{ij}_\alpha(\lambda^a_{ij}+\lambda^a_{ib}\lambda^b_j-\lambda^b_i\Lambda^k_{bj}\lambda^a_k)+\lambda^a_k\lambda^k_\alpha,$$

$$\lambda_i=-\frac{1}{h}(\lambda^a_{ia}-\lambda^a_\alpha\Lambda^\alpha_{ai}+\Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_j\lambda^j_\alpha),\quad (18)$$

$$\lambda_\alpha=-\frac{1}{h}(l^a_{\alpha a}-l^i_{\alpha a}l^a_i-l^a_\beta\Lambda^\beta_{ia}l^i_\alpha+l^i_\alpha l^j_\beta\Lambda^\beta_{ia}l^a_j).$$

Замечание. Охваты ($18_{2,3}$) компонент λ_i,λ_α оснащающего квазитензора совпадают с охватами, найденными в работе [1].

Определение. *Поднормализацией точечно-плоскостной поверхности* S_{h+r} *назовем ее оснащение полем плоскостей* $P_r = [\,A, P_{r-1}\,]$ *, определяемым полем квазитензора* λ_i^a .

Теорема [4]. *На точечно-плоскостной поверхности* S_{h+r} *в проективном пространстве* P_n *в предположении существования двух относительных инвариантов композиционное оснащение ослабляется до поднормализации по формулам (17, 18).*

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения плоскостной поверхности, рассматриваемой с трех точек зрения. Калининград, Вып. 24. 1993. С. 112—123.

2. *Skriagina (Вялова) A.* The structure of equipment of centered plane surface // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. P. 197—200.

3. *Омельян О.* Внутренние групповые связности на распределении плоскостей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. С. 120—125.

4. *Вялова А.В.* Поднормализация точечно-плоскостной поверхности // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Астрахани — 2008». Астрахань, 2008. С. 16—17.

A. Vyalova

SUBNORMALIZATION OF THE POINT-PLANE SURFACE

On the point-plane surface S_{h+r} in n-dimensional projective space P_n, assuming of existence of two relative invariants, the coverages of components of equipping quasitensor are constructed. The definition of subnormalization of plane-point surface is given.

Subnormalization is generated by the composite equipment, and vice versa, it is proved, that subnormalization generates the composite equipment.