8. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. семин. Казань, 1984. №16. С. 117—127.

G. Sultanova

The estimate of dimensions of Lie algebras for infinitesimal automorphisms in the tangent bundle with the complete lift connection with nonprojective Euclidean base

We obtain upper bounds of dimensions of Lie algebra for infinitesimal automorphisms in tangent bundles with a complete lift connection in the case when the connection is nonprojective-Euclidean, and the curvature tensor components of connection satisfy the special condition.

УДК 514.76

К.К. Хабазня
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
mmphj@mail.ru

Связности 1-го и 2-го порядков на центропроективных многообразиях

Работа посвящена центропроективным многообразиям, связностям на них и геометрическим объектам, описывающим эти связности. Определяется центропроективное многообразие W_n, даются его структурные уравнения, вводятся понятия голономного W_n^H, полуголономного W_n^S и неголономного W_n^N многообразий, а также главных расслоений центропроективных кореперов 1-го $C^1(W_n)$ и 2-го $C^2(W_n)$ порядков. Задаются фундаментально-групповые связности в этих рас-

слоениях, вводятся объекты кривизны и кручения центропроективных связностей 1-го и 2-го порядков и формулируются утверждения, касающиеся тензорности этих объектов. Объект кручения 2-го порядка центропроективной связности 2-го порядка построен по аналогии с объектом кручения 1-го порядка.

Ключевые слова: центропроективное многообразие, голономность, полуголономность, неголономность, главное расслоение центропроективных кореперов, центропроективная связность, кривизна и кручение центропроективной связности 1-го и 2-го порядков.

1. Центропроективные многообразия. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие V_n, в каждой точке $A \in V_n$ имеется касательное векторное пространство T_n размерности n. Наделим его структурой аффинного пространства с центром A, дополним его несобственной гиперплоскостью L_{n-1}, результат обозначим P_n^*. Расширим действие линейной группы $GL(n)$ до действия коаффинной группы $GA^*(n)$ в P_n^*, которое станет центропроективным пространством. Выполним аналогичные построения с касательными пространствами высших порядков. Результат назовем центропроективным многообразием W_n [1].

Отнесем некоторое центропроективное пространство P_n^* к подвижному реперу $\{\overline{A}, \overline{A}_I\}$, тогда для смещения точки A имеем

$$d\overline{A} = \omega\overline{A} + \omega^I \overline{A}_I \quad \left(I, J, \ldots = \overline{1,n}\right), \tag{1}$$

где ω, ω^I — линейные дифференциальные формы. Имеет место цепочка эквивалентностей $A - const \;\Leftrightarrow\; d\overline{A} = \omega\overline{A} \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; \omega^I \overline{A}_I = \overline{0} \;\Leftrightarrow\; \omega^I = 0$. Вполне интегрируемость последней системы эквивалентна уравнениям

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I . \tag{2}$$

Для продолжения уравнения (1) необходимо выполнение структурного уравнения

$$d\omega = \omega^I \wedge \omega_I . \qquad (3)$$

Продолжая уравнения (2) и (3), приходим к уравнениям

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I , \; d\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J + \omega^J \wedge \omega_{IJ} , \qquad (4)$$

причем

$$\omega_{JK}^I \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 , \; \omega_{IJ} \wedge \omega^I \wedge \omega^J = 0 , \qquad (5)$$

что равносильно [2]

$$\omega_{[JK]}^I = \lambda_{JKL}^I \omega^L , \; \lambda_{(JK)L}^I = 0 , \; \lambda_{\{JKL\}}^I = 0 ;$$

$$\omega_{[IJ]} = \lambda_{IJK} \omega^K , \; \lambda_{(IJ)K} = 0 , \; \lambda_{\{IJK\}} = 0 .$$

Продолжая структурные уравнения (4), получим

$$d\omega_{JK}^I = \omega_{JK}^L \wedge \omega_L^I - \omega_{LK}^I \wedge \omega_J^L - \omega_{JL}^I \wedge \omega_K^L + \omega^L \wedge \omega_{JKL}^I ,$$

$$d\omega_{IJ} = \omega_{IJ}^K \wedge \omega_K - \omega_{IK} \wedge \omega_J^K - \omega_{KJ} \wedge \omega_I^K + \omega^K \wedge \omega_{IJK} , \qquad (6)$$

причем $\omega_{J[KL]}^I = \lambda_{JKLM}^I \omega^M$, $\omega_{I[JK]} = \lambda_{IJKL} \omega^L$.

Если справедливы уравнения $\omega_{[JK]}^I = 0$, $\omega_{[IJ]} = 0$, то есть формы ω_{JK}^I и ω_{IJ} симметричны по нижним индексам (достаточные, но не необходимые условия для справедливости равенств (5)), тогда многообразие W_n называется голономным и обозначается W_n^H . В случае, когда

$$\omega_{[JK]}^I = \lambda_{JKL}^I \omega^L , \; \omega_{[IJ]} = \lambda_{IJK} \omega^K \; \Leftrightarrow \; \omega_{[JK]}^I \cong 0 , \; \omega_{[IJ]} \cong 0 , \qquad (7)$$

где «$\cong$» означает сравнимость по модулю базисных форм ω^I , многообразие называется полуголономным и обозначается W_n^S . В общем случае, когда $\omega_{[JK]}^I \neq \lambda_{JKL}^I \omega^L$, $\omega_{[IJ]} \neq \lambda_{IJK} \omega^K$, многообразие называется неголономным [1] и обозначается

W_n^N. Заметим, что невыполнение дифференциальных сравнений (7) означает, что структурные уравнения (4) получены не в результате продолжения структурных уравнений (2) и (3).

Уравнения (2) и (4) являются структурными для расслоения с базой W_n, типовым слоем — коаффинной группой $GA^*(n)$, называемого главным расслоением центропроективных кореперов 1-го порядка $C^1(W_n)$. Аналогичным образом определяется главное расслоение центропроективных кореперов 2-го порядка $C^2(W_n)$, для него структурными будут уравнения (2), (4) и (6).

2. Центропроективная связность 1-го порядка. Фундаментально-групповая связность в главном расслоении центропроективных кореперов 1-го порядка $C^1(W_n)$ задается с помощью форм

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K, \ \tilde{\omega}_I = \omega_I - \Gamma_{IJ}\omega^J. \tag{8}$$

Дифференцируя эти формы внешним образом, получим

$$d\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + \omega^K \wedge \left(\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I\right) - \Gamma_{JL}^K \Gamma_{KM}^I \omega^L \wedge \omega^M,$$

$$d\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_I^J \wedge \tilde{\omega}_J + \omega^J \wedge \left(\Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K + \omega_{IJ}\right) - \Gamma_{IJ}^L \Gamma_{LK} \omega^J \wedge \omega^K,$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{JK}^I = d\Gamma_{JK}^I - \Gamma_{JL}^I \omega_K^L - \Gamma_{LK}^I \omega_J^L + \Gamma_{JK}^L \omega_L^I.$$

Центропроективная связность в расслоении центропроективных кореперов $C^1(W_n)$ задается полем объекта $\Gamma^1 = \left\{\Gamma_{JK}^I, \Gamma_{IJ}\right\}$ на базе W_n:

$$\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I = \Gamma_{JKL}^I \omega^L, \ \Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K + \omega_{IJ} = \Gamma_{IJK}\omega^K. \tag{9}$$

Структурные уравнения форм центропроективной связности запишутся в виде

$$d\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L ,$$

$$d\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_I^J \wedge \tilde{\omega}_J + R_{IJK} \omega^J \wedge \omega^K ,$$

где $R^1 = \left\{ R_{JKL}^I , R_{IJK} \right\}$ — объект кривизны центропроективной связности Γ^1 , компоненты которого выражаются по формулам

$$R_{JKL}^I = \Gamma_{J[KL]}^I - \Gamma_{J[K}^M \Gamma_{ML]}^I , \; R_{IJK} = \Gamma_{I[JK]} - \Gamma_{I[J}^L \Gamma_{LK]} . \qquad (10)$$

Продолжая уравнения (10), получим

$$\Delta\Gamma_{JKL}^I - \Gamma_{JM}^I \omega_{KL}^M - \Gamma_{MK}^I \omega_{JL}^M + \Gamma_{JK}^M \omega_{ML}^I + \omega_{JKL}^I = \Gamma_{JKLM}^I \omega^M , \quad (11)$$

$$\Delta\Gamma_{IJK} - \Gamma_{IL} \omega_{JK}^L - \Gamma_{LJ} \omega_{IK}^L + \Gamma_{IJ}^L \omega_{LK} + \Gamma_{IJK}^L \omega_L + \omega_{IJK} = \Gamma_{IJKL} \omega^L .$$

Учитывая уравнения (9, 11) и применяя оператор Δ к выражениям (10), получим

$$\Delta R_{JKL}^I - \Gamma_{JM}^I \omega_{[KL]}^M + \omega_{J[KL]}^I \cong 0 ,$$

$$\Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L \omega_L - \Gamma_{IL} \omega_{[JK]}^L + \omega_{I[JK]} \cong 0 .$$

В случае полуголономности многообразия W_n $\omega_{[JK]}^I \cong 0$, $\omega_{J[KL]}^I \cong 0$ и $\omega_{I[JK]} \cong 0$. Если многообразие W_n голономно, то эти сравнения становятся равенствами, значит, в обоих случаях

$$\Delta R_{JKL}^I \cong 0 , \; \Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L \omega_L \cong 0 .$$

Ввиду этого не будем выделять особый голономный случай, то есть при употреблении в дальнейшем понятия полуголономного многообразия подразумевается, что оно включает голономное многообразие.

Теорема 1. *Объект кривизны* R^1 *центропроективной связности* Γ^1 *на неголономном многообразии* W_n^N *образует* *(см.: [1]) геометрический объект лишь вместе с объектом* Γ^1*, на полуголономном многообразии* W_n^S *объект* R^1 *— тензор, содержащий подтензор аффинной кривизны [3].*

Внесем формы (8) в уравнения (2) и (3):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \widetilde{\omega}_J^I + S_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K \,,\; d\omega = \omega^I \wedge \widetilde{\omega}_I + S_{IJ}\omega^I \wedge \omega^J \,,$$

где $S_{JK}^I = \Gamma_{[JK]}^I$, $S_{IJ} = \Gamma_{[IJ]}$. Объект $S^1 = \{S_{JK}^I, S_{IJ}\}$ называется *объектом кручения [4] центропроективной связности 1-го порядка* Γ^1.

Проальтернируем дифференциальные сравнения (9):

$$\Delta S_{JK}^I + \omega_{[JK]}^I \cong 0\,,\; \Delta S_{IJ} + S_{IJ}^K \omega_K + \omega_{[IJ]} \cong 0\,.$$

В полуголономном случае, когда $\omega_{[JK]}^I \cong 0$, $\omega_{[IJ]} \cong 0$, имеем

$$\Delta S_{JK}^I \cong 0\,,\; \Delta S_{IJ} + S_{IJ}^K \omega_K \cong 0\,.$$

Теорема 2. *Объект кручения центропроективной связности* Γ^1 *на неголономном многообразии* W_n^N *не образует тензор [1], на полуголономном многообразии* W_n^S *объект кручения* S^1 *— тензор, содержащий подтензор кручения* S_{JK}^I *аффинной подсвязности 1-го порядка [1; 3].*

3. Центропроективная связность 2-го порядка. Фундаментально-групповая связность в главном расслоении центропроективных кореперов 2-го порядка $C^2(W_n)$ задается с помощью форм (8) и следующих:

$$\tilde{\omega}_{JK}^I = \omega_{JK}^I - L_{JKL}^I \omega^L \,,\; \tilde{\omega}_{IJ} = \omega_{IJ} - L_{IJK}\omega^K \,. \qquad (12)$$

Дифференцируя их, получим

$$d\widetilde{\omega}_{JK}^I = \widetilde{\omega}_{JK}^L \wedge \widetilde{\omega}_L^I - \widetilde{\omega}_{LK}^I \wedge \widetilde{\omega}_J^L - \widetilde{\omega}_{JL}^I \wedge \widetilde{\omega}_K^L +$$
$$+ \omega^L \wedge \left(\Delta L_{JKL}^I - \Gamma_{ML}^I \omega_{JK}^M + \Gamma_{JL}^M \omega_{MK}^I + \Gamma_{KL}^M \omega_{JM}^I + \omega_{JKL}^I\right) +$$
$$+ \left(L_{NKL}^I \Gamma_{JM}^N + L_{JNL}^I \Gamma_{KM}^N - L_{JKL}^N \Gamma_{NM}^I\right)\omega^L \wedge \omega^M \,,$$

$$d\widetilde{\omega}_{IJ}=\widetilde{\omega}_{IJ}^{K}\wedge\widetilde{\omega}_{K}-\widetilde{\omega}_{IK}\wedge\widetilde{\omega}_{J}^{K}-\widetilde{\omega}_{KJ}\wedge\widetilde{\omega}_{I}^{K}+$$
$$+\omega^{K}\wedge\left(\Delta L_{IJK}+L_{IJK}^{L}\omega_{L}+\Gamma_{JK}^{L}\omega_{IL}+\Gamma_{IK}^{L}\omega_{LJ}-\Gamma_{LK}\omega_{IJ}^{L}+\omega_{IJK}\right)-$$
$$-\left(L_{IJK}^{M}\Gamma_{ML}-L_{IMK}\Gamma_{JL}^{M}-L_{MJK}\Gamma_{IL}^{M}\right)\omega^{K}\wedge\omega^{L}.$$

Центропроективная связность 2-го порядка в расслоении центропроективных реперов $C^2(W_n)$ задается полем объекта $\Gamma^2=\left\{\Gamma^1,L_{JKL}^{I},L_{IJK}\right\}$ на базе W_n, причем

$$\Delta L_{JKL}^{I}-\Gamma_{ML}^{I}\omega_{JK}^{M}+\Gamma_{JL}^{M}\omega_{MK}^{I}+\Gamma_{KL}^{M}\omega_{JM}^{I}+\omega_{JKL}^{I}=L_{JKLM}^{I}\omega^{M},$$
$$\Delta L_{IJK}+L_{IJK}^{L}\omega_{L}+\Gamma_{JK}^{L}\omega_{IL}+\Gamma_{IK}^{L}\omega_{LJ}- \tag{13}$$
$$-\Gamma_{LK}\omega_{IJ}^{L}+\omega_{IJK}=L_{IJKL}\omega^{L}.$$

Структурные уравнения форм (12) запишутся в виде

$$d\widetilde{\omega}_{JK}^{I}=\widetilde{\omega}_{JK}^{L}\wedge\widetilde{\omega}_{L}^{I}-\widetilde{\omega}_{LK}^{I}\wedge\widetilde{\omega}_{J}^{L}-\widetilde{\omega}_{JL}^{I}\wedge\widetilde{\omega}_{K}^{L}+R_{JKLM}^{I}\omega^{L}\wedge\omega^{M},$$
$$d\widetilde{\omega}_{IJ}=\widetilde{\omega}_{IJ}^{K}\wedge\widetilde{\omega}_{K}-\widetilde{\omega}_{IK}\wedge\widetilde{\omega}_{J}^{K}-\widetilde{\omega}_{KJ}\wedge\widetilde{\omega}_{I}^{K}+R_{IJKL}\omega^{K}\wedge\omega^{L},$$

где $R^2=\left\{R^1,R_{JKLM}^{I},R_{IJKL}\right\}$ — объект кривизны центропроективной связности Γ^2, компоненты 2-го порядка которого выражаются по формулам

$$R_{JKLM}^{I}=L_{JK[LM]}^{I}-L_{JK[L}^{N}\Gamma_{NM]}^{I}+L_{NK[L}^{I}\Gamma_{JM]}^{N}+L_{JN[L}^{I}\Gamma_{KM]}^{N},$$
$$R_{IJKL}=L_{IJ[KL]}-L_{IJ[K}^{M}\Gamma_{ML]}+L_{IM[K}\Gamma_{JL]}^{M}+L_{MJ[K}\Gamma_{IL]}^{M}.$$

Продолжая уравнения (13), получим

$$\Delta L_{JKLM}^{I}-L_{JKN}^{I}\omega_{LM}^{N}+L_{JKL}^{N}\omega_{NM}^{I}-L_{NKL}^{I}\omega_{JM}^{N}-L_{JNL}^{I}\omega_{KM}^{N}-$$
$$-\Gamma_{NLM}^{I}\omega_{JK}^{N}-\Gamma_{NL}^{I}\omega_{JKM}^{N}+\Gamma_{JLM}^{N}\omega_{NK}^{I}+\Gamma_{JL}^{N}\omega_{NKM}^{I}+$$
$$+\Gamma_{KLM}^{N}\omega_{JN}^{I}+\Gamma_{KL}^{N}\omega_{JNM}^{I}+\omega_{JKLM}^{I}\cong 0,$$

$$\begin{aligned}&\mathit{\Delta} L_{IJKL} - L_{IJM}\omega^M_{KL} - L_{IMK}\omega^M_{JL} - L_{MJK}\omega^M_{IL} - \Gamma_{MKL}\omega^M_{IJ} + \\ &+\Gamma^M_{JKL}\omega_{IM} + \Gamma^M_{IKL}\omega_{MJ} + L^M_{IJK}\omega_{ML} + \Gamma^M_{JK}\omega_{IML} + \\ &+\Gamma^M_{IK}\omega_{MJL} - \Gamma_{MK}\omega^M_{IJL} + L^M_{IJKL}\omega_M + \omega_{IJKL} \cong 0.\end{aligned} \qquad (14)$$

Учитывая уравнения (9, 13, 14), имеем

$$\begin{aligned}&\mathit{\Delta} R^I_{JKLM} - R^I_{NLM}\,\omega^N_{JK} + R^N_{JLM}\,\omega^I_{NK} + R^N_{KLM}\,\omega^I_{JN} - \\ &- L^I_{JKN}\omega^N_{[LM]} + \omega^I_{JK[LM]} \cong 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathit{\Delta} R_{IJKL} - R_{MKL}\omega^M_{IJ} + R^M_{JKL}\omega_{IM} + R^M_{IKL}\omega_{MJ} + \\ &+R^M_{IJKL}\omega_M - L_{IJM}\omega^M_{[KL]} + \omega_{IJ[KL]} \cong 0.\end{aligned} \qquad (15)$$

В случае полуголономности многообразия W_n $\omega^I_{[JK]} \cong 0$, $\omega^I_{JK[LM]} \cong 0$ и $\omega_{IJ[KL]} \cong 0$, а значит, дифференциальные уравнения (15) упростятся:

$$\mathit{\Delta} R^I_{JKLM} - R^I_{NLM}\,\omega^N_{JK} + R^N_{JLM}\,\omega^I_{NK} + R^N_{KLM}\,\omega^I_{JN} \cong 0\,,$$

$$\mathit{\Delta} R_{IJKL} - R_{MKL}\,\omega^M_{IJ} + R^M_{JKL}\,\omega_{IM} + R^M_{IKL}\,\omega_{MJ} + R^M_{IJKL}\,\omega_M \cong 0\,.$$

Теорема 3. *Объект центропроективной кривизны 2-го порядка R^2 на неголономном центропроективном многообразии W_n^N образует квазитензор лишь в совокупности с объектом центропроективной связности 2-го порядка Γ^2, на полуголономном многообразии W_n^S объект кривизны R^2 — тензор (ср.: [3]).*

По аналогии с объектом кручения S^1 для связности 1-го порядка Γ^1 введем объект кручения S^2 центропроективной связности 2-го порядка Γ^2, который при обращении в нуль дает выражения частично альтернированных компонент объекта связности 2-го порядка через компоненты объекта связности 1-го порядка в случае полуголономного W_n^S и голономного W_n^H многообразий. Для этого внесем формы (8) и (12) в уравнения (4):

$$d\omega_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + \Gamma_{JL}^K \omega^L \wedge \tilde{\omega}_K^I + \Gamma_{KM}^I \tilde{\omega}_J^K \wedge \omega^M + \\ + \omega^K \wedge \tilde{\omega}_{JK}^I + S_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L,$$

$$d\omega_I = \tilde{\omega}_I^J \wedge \tilde{\omega}_J + \Gamma_{JL} \tilde{\omega}_I^J \wedge \omega^L + \Gamma_{IK}^J \omega^K \wedge \tilde{\omega}_J + \\ + \omega^J \wedge \tilde{\omega}_{IJ} + S_{IJK} \omega^J \wedge \omega^K,$$

где $S_{JKL}^I = L_{J[KL]}^I + \Gamma_{J[K}^M \Gamma_{ML]}^I$, $S_{IJK} = L_{I[JK]} + \Gamma_{I[J}^L \Gamma_{LK]}$. Объект $S^2 = \{S^1, S_{JKL}^I, S_{IJK}\}$ назовем объектом кручения центропроективной связности 2-го порядка Γ^2. Учитывая при применении оператора Δ уравнения (9) и (13), имеем

$$\Delta S_{JKL}^I + S_{KL}^M \omega_{JM}^I + \omega_{J[KL]}^I \cong 0,$$

$$\Delta S_{IJK} + S_{JK}^L \omega_{IL} + S_{IJK}^L \omega_L + \omega_{I[JK]} \cong 0.$$

В полуголономном случае, когда $\omega_{J[KL]}^I \cong 0$ и $\omega_{I[JK]} \cong 0$, получаем

$$\Delta S_{JKL}^I + S_{KL}^M \omega_{JM}^I \cong 0, \; \Delta S_{IJK} + S_{JK}^L \omega_{IL} + S_{IJK}^L \omega_L \cong 0.$$

Теорема 4. *Объект кручения 2-го порядка S^2 центропроективной связности Γ^2 на неголономном многообразии W_n^N не является тензором, на полуголономном многообразии W_n^S объект кручения S^2 — тензор, содержащий подтензор [5] кручения 2-го порядка $\{S_{JK}^I, S_{JKL}^I\}$ аффинной подсвязности 2-го порядка, задаваемой подобъектом $\{\Gamma_{JK}^I, L_{JKL}^I\}$.*

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
2. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.
3. *Башашина К. В., Аноева Т. А.* К геометрии центропроективного многообразия и гладкого подмногообразия // Дни науки. Калининград, 2010. С. 60—71.
4. *Лемлейн В. Г.* Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Литов. мат. сб. Вильнюс, 1964. С. 41—132.
5. *Полякова К. В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 108—125.

K. Khabaznia

Connections of first and second order on centroprojective manifolds

The work is dedicated to centroprojective manifolds, connections on them and geometric objects that describe these connections. Definition of centroprojective manifold W_n, its structure equations are given, notions of holonomic W_n^H, semiholonomic W_n^S and nonholonomic W_n^N manifolds as well as the notion of principal bundles of centroprojective coframes of first $C^1(W_n)$ and second $C^2(W_n)$ orders are entered. Fundamental-group connections in these bundles are determined, objects of curvature and torsion of centroprojective connections of first and second orders are entered then, and prepositions about whether these objects are tensors or not are formulated. Second order torsion object of centroprojective connection of second order are built by analogy with the torsion object of first order.