ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I5 1984

УДК 514.75

С.В. Киреева

ГЕОМЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ, КАЖДАЯ ЛИНИЯ КОТОРОГО- ДВОЙНАЯ

В данной работе в n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается геометрия отображения, в котором каждая линия будет двойной, причем касательные к этим двойным линиям пересекаются в точках, принадлежащих заданным гиперплоскостям.

п.I. В проективном пространстве P_n задано отображение f области Ω в область $\bar{\Omega}$: $A \to B = f(A) \neq A$. Области Ω, $\bar{\Omega}$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A) = \Pi_{n-1}(B)$. При отображении f сеть $\Sigma_n \subset \Omega$ переходит в сеть $\bar{\Sigma}_n \subset \bar{\Omega}$. В области Ω задан репер $R^A = \{A, A_i\}$ ($i=1,2\ldots,n$) , где (AA_i) -касательная к линии ω^i сети Σ_n ,а A_i -нормальная точка направления (AA_i) .Репер $R^B = \{B, B_i\}$ -образ репера R^A в отображении f ; (BB_i)-касательная к линии $\bar{\omega}^i = \omega^i$ сети $\bar{\Sigma}_n$, $B_i \in \Pi_{n-1}(A)$. Точки B , B_i в репере R^A имеют следующие представления:

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i\,, \quad \vec{B}_i = \gamma_i^j \vec{A}_j\,. \tag{1}$$

В данной работе индексы $i, j, \kappa, \ell, \ldots$ принимают значения $1,2,\ldots,n$, а индексы α, β, γ -значения $0,1,2,..n$.

Отображение f определяется уравнениями: $\bar{\omega}^i = \omega^i$.

В данной работе будет рассмотрен частный случай отображения f ,когда произвольная линия ℓ области Ω будет переходить в такую линию $\bar{\ell}$,что касательные к ним пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.
Такое отображение в данной работе будем обозначать через

g. Найдем условия, которым должны удовлетворять функции γ_i^j, чтобы отображение f стало отображением g.

Пусть точка A смещается по направлению (AL), где $\vec{L}=e^i\vec{A}_i$: $\quad d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\theta(e^i\vec{A}_i)$.

Точка B при этом сместится по направлению $(B\bar{L})$: $\bar{\omega}^i=\theta e^i$

$$d\vec{B}=\bar{\omega}_0^0\vec{B}+\theta(e^i\vec{B}_i)=\bar{\omega}_0^0\vec{B}+\theta(e^i\gamma_i^j\vec{A}_j)=\bar{\omega}_0^0\vec{B}+\theta\vec{\bar{L}}.$$

Точки L и $\bar{L}$ для отображения g должны совпадать. Это будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\gamma e^i=e^j\gamma_j^i. \qquad \text{(a)}$$

Но линия ℓ произвольная. Равенства (a) должны выполняться в отображении g при любых ℓ^i. Поэтому $\gamma_j^i=0\ (i\neq j)$, $\gamma_1^1=\gamma_2^2=\ldots=\gamma_n^n=\gamma$. Формулы (1) при отображении g принимают вид:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i,\quad \vec{B}_i=\gamma\vec{A}_i. \qquad \text{(I)}$$

Связь между формами ω_α^β, $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ реперов $\mathcal{R}^A, \mathcal{R}^B$ выражается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} &\bar{\omega}^i=\omega^i, && \bar{\omega}_i^i=\omega_i^i-\gamma^i\omega_i^0+\gamma^k\omega_k^0, \\ &\bar{\omega}_j^0=\gamma\omega_j^0, && \\ &\bar{\omega}_0^0=\omega_0^0+\gamma^k\omega_k^0, && \bar{\omega}_i^j=\omega_i^j-\gamma^j\omega_i^0\quad (i\neq j). \end{aligned} \qquad \text{(2)}$$

Разложения дифференциалов

$$d\gamma_j^i-\gamma_k^i\omega_j^k+\gamma_j^k\omega_k^i-(\gamma^k\gamma_j^i+\gamma^i\gamma_j^k)\,\omega_k^0=\gamma_{jk}^i\omega^k$$

получены в работе [6]. Если учесть, что 1/ $\gamma_{jk}^i=\gamma_{kj}^i$, 2/ для отображения g: $\gamma_j^i=\delta_j^i\gamma$, $\bar{\omega}_j^0=\gamma\omega_j^0$, то мы приходим к теореме.

Т е о р е м а I. В отображении $g_{\text{общ.}}$ нормализации $A\to\Pi_{n-1}(A)$; $B\to\Pi_{n-1}(A)$ порождают в областях $\Omega, \bar{\Omega}$ эквиаффинные связности $\nabla, \bar{\nabla}$.

З а м е ч а н и е. Отображение g, для которого $\gamma^i\neq 0$ ($i=1,2,\ldots,n$) будем обозначать $g_{\text{общ.}}$.

При отображении g тензоры Риччи $R_{ij}, \bar{R}_{ij}$ связностей $\nabla, \bar{\nabla}$ пропорциональны: $\bar{R}_{ij}=\gamma R_{ij}$.

Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы отображение f с совпавшими нормализующими плоскостями было отображением g, необходимо и достаточно, чтобы конусы Риччи связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ пересекались в нормализующей плоскости по одной и той же квадрике.

п.2. В работе [7] рассматривались инвариантные точки $\vec{N}_i^i=-\gamma_i^i\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{C}=\gamma^i\vec{A}_i$, $C=(AB)\cap\Pi_{n-1}(A)$.

В случае отображения g все инвариантные точки N_i^i $(i=1,2,\ldots,n)$ совпали с одной точкой $\vec{N}=-\gamma\vec{A}+\vec{B}$, причем $N\neq C$ $(\gamma\neq 1)$, $d\vec{N}=(\omega_0^0+\gamma^k\omega_k^0)\vec{N}$, $(AB,CN)=\gamma$. Это значит, что точка N неподвижна при любом смещении точки A.

Итак: отображение g каждой точке A ставит в соответствие такую точку B, принадлежащую прямой (AN), где N – неподвижная точка отображения g, что сложное отношение $(AB,CN)=\gamma$. Прямая (AB) при отображении g переходит в себя.

п.3. Напомним [2], что : $\bar{\omega}_i^j-\omega_i^j-\delta_i^j(\bar{\omega}_0^0-\omega_0^0)=b_{ik}^j$, $b_{ik}^j=b_{ki}^j$. Используя формулы (2), имеем: $b_{ik}^j\omega^k=-\gamma^j a_{ik}^0\omega^k$. Рассмотрим отображение $\bar{h}:\Pi_{n-1}(A)\to\Pi_{n-1}(A)$. Оно ставит в соответствие точке $\vec{M}=\xi^i\vec{A}_i$ точку $\bar{h}(\vec{M})=b_{jk}^i\xi^j\xi^k\vec{A}_i$. Используя равенства $b_{jk}^i=-\gamma^i a_{jk}^0$, получаем

$$\bar{h}(\vec{M})=-a_{jk}^0\xi^j\xi^k\vec{e}. \qquad (3)$$

Из (3) заключаем, что 1/ если точка M не принадлежит квадрике Риччи $K^2=\{\varphi=0\}\cap\Pi_{n-1}(A)$, то $\bar{h}(M)=C$. Это означает, что любому направлению (AM), не принадлежащему конусу Риччи, соответствует направление (AC), то есть прямая (AC) – тотально линеаризующая прямая [5] отображения g; 2/ если $a_{jk}^0\xi^j\xi^k=0$, точка $M\in K^2$, то $\bar{h}(\vec{M})=\vec{0}$. Направления (AM), для которых $\bar{h}(\vec{M})=\vec{0}$, являются $\hat{g}$-главными направлениями [5] отображения g. Поэтому $\hat{g}$-главные направления отображения g лежат на конусе Риччи. Итак, множество всех характеристических направлений [5] отображения g состоит из тотально линеаризирующей прямой (AC) и конуса $\hat{g}$-главных направлений – конуса Риччи.

Т е о р е м а 3. Сеть Σ_n будет характеристической в отображении g тогда и только тогда, когда конус Риччи связности ∇ содержит касательные (AA_i) к линиям ω^i сети Σ_n в качестве своих образующих.

Список литературы

1. Базылев В.Т. О нормализациях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью.-Лит.матем.сб., 1966, вып.6, № 3, с.313-322

2. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств.-Уч.зап.МГПИ им.В.И. Ленина, 1970, № 374, т.I, с.28-40.

3. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, вып.6, 1975, с.19-25.

4. Норден А.П. Пространства аффинной связности.-М.; Наука, 1976.

5. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-Проблемы геометрии (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР), 1963, с.65-107.

6. Киреева С.В. Двойные линии и отображения.-В кн.: Прикладные вопросы дифференциальной геометрии.МОПИ. (Деп.рукопись в ВИНИТИ АН СССР, № 1648-82, с.70-80).

7. Киреева С.В. О паре сетей.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983, Вып.14, с.26-31.