



УДК 531.66

**Н. Л. Великанов, В. А. Наумов
С. И. Корягин, Д. А. Тарасов**

УПРУГИЙ УДАР ТЕЛА О НАКЛОННУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Экспериментально определен коэффициент восстановления при ударе шара о неподвижную наклонную поверхность. Показано, что коэффициент восстановления является функцией угла наклона.

36

The restoration factor is experimentally defined at blow of ball about a motionless oblique surface. It is shown that the restoration factor is function of an angle of slope.

Ключевые слова: удар, коэффициент восстановления, коэффициент трения, наклонная поверхность.

Key words: blow, restoration factor, a coefficient of friction, oblique surface.

Ударные явления свойственны работе различных машин и механизмов, являются частью технологических процессов или аварийных ситуаций. Большинство таких задач могут быть исследованы в соответствии с теорией удара Ньютона [1–5].

Известно [5], что плоская задача удара тела о шероховатую поверхность при точечном контакте тела с поверхностью имеет аналитическое решение в пределах теории удара Ньютона. Для этого случая корректно находятся ударный импульс реакции поверхности удара и скорость тела после удара. Для наклонных поверхностей принимается гипотеза Рауса о том, что при ударе трение сводится к сухому трению с коэффициентом трения, определяемым обычными общепринятыми способами [1–5].

В работе [5] показано, что тип удара или характер движения точки соприкосновения в процессе удара определяется с помощью графической картины на плоскости параметров угол трения и угол падения (который определяет направление скорости точки соприкосновения тела с поверхностью до удара). В качестве границ, разделяющих области, соответствующие различным типам удара, выступают кривые, поведение которых зависит от положения точки соударения относительно центра масс тела, радиуса инерции тела, угла трения и коэффициента восстановления при ударе [5]. Однако, как показывают результаты анализа опытных данных [2; 3], при возрастании угла наклона поверхности коэффициент восстановления при ударе начинает меняться с изменением угла наклона. Установление этой зависимости является актуальной задачей [6; 7].

В результате теоретического анализа влияния силы аэродинамического сопротивления на результаты опытов [2; 3] установлено, что оно



не превышает 0,1 %. Поэтому в дальнейшем силой аэродинамического сопротивления пренебрегаем.

Взаимодействие достаточно крупных (по сравнению с высотой бугорков шероховатости) сферических тел после удара о шероховатую стенку при сравнительно невысоких скоростях хорошо описывается с помощью модели Рауса, важный параметр в которой – безразмерная величина:

$$\psi = (2/7) |W_\tau + \Omega \delta/2| / [|W_n|(1+k)],$$

где k – коэффициент восстановления; W_τ , W_n , Ω – тангенциальная составляющая скорости центра масс сферы, нормальная составляющая скорости, угловая скорость сферы перед ударом соответственно.

Составляющие скорости сферического тела после удара:

$$w_n = -k W_n, \quad w_\tau = \begin{cases} W_\tau - \mu(1+k)W_n, & \mu < \psi, \\ \frac{5}{7}W_\tau - \frac{\delta}{7}\Omega, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} \Omega - 5\mu(1+k)W_n / \delta, & \mu < \psi, \\ \frac{2}{7}\Omega - \frac{10}{7}\frac{W_\tau}{\delta}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где μ – коэффициент трения Кулона во время удара.

В условиях рассматриваемой задачи

$$W_\tau = W \sin \alpha, \quad W_n = W \cos \alpha, \quad \Omega = 0, \quad \psi = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{7(1+k)},$$

$$w_\tau = \begin{cases} W_\tau - \mu(1+k)W_n, & \mu < \psi, \\ \frac{5}{7}W_\tau, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} -5\mu(1+k)W_n / \delta, & \mu < \psi, \\ -\frac{10}{7}\frac{W_\tau}{\delta}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Динамика сферы, вращающейся после взаимодействия с пластиной, описывается уравнениями

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)}, \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)}), \quad (1)$$

где \vec{V} – скорость центра масс твердого тела; \vec{L}_C – кинетический момент сферы относительно ее центра масс; $\sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)})$ – главный момент приложенных внешних сил относительно центра масс.

Векторная система уравнений (1) может быть заменена скалярными уравнениями. В нашем частном случае плоско-параллельного движения остается три уравнения

$$m \frac{du}{dt} = \sum F_x^{(e)}, \quad m \frac{dv}{dt} = \sum F_y^{(e)}, \quad I_{zC} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{zC}(\vec{F}^{(e)}),$$

где I_{zC} – момент инерции сферы относительно оси, перпендикулярной основной плоскости ($X-Y$) и проходящей через центр масс; для сферического, однородного тела $I_{zC} = m\delta^2/10$; u, v – проекции \vec{V} на оси X, Y .

На вращающуюся твердую частицу в вязкой среде действует момент сопротивления, который обычно записывают в виде

$$M_{zC} = -0,5 C_\omega \rho_f (\delta/2)^5 |\omega| \omega.$$



При $Re_\omega = |\Omega_R| \delta^2 / \nu < 4000$ коэффициент момента сопротивления

$$C_\omega = \frac{64\pi}{Re_\omega} \left(1 + a\sqrt{Re_\omega} + b Re_\omega \right), \quad a = 0,029, \quad b = 0,00054.$$

При вращении твердого тела в вязкой среде на него действует поперечная (подъемная) сила, которую называют силой Жуковского – Магнуса и обычно выражают в виде

$$\vec{F}_M = C_M (\delta/2)^3 \rho_f [\vec{\Omega} \times \vec{V}].$$

Анализ экспериментальных и теоретических данных позволяет в первом приближении при $Re_\omega < 100$ считать $C_M/\pi = 1$, а при $100 \leq Re_\omega \leq 3,6 \cdot 10^4$ использовать формулу

$$C_M/\pi = 6,05 / Re_\omega^{0,39}.$$

Уравнения (1) с учетом пренебрежения силой аэродинамического сопротивления записаны в виде

$$\frac{du}{dt} = \gamma v, \quad \frac{dv}{dt} = -g - \gamma u, \quad \omega = \text{const}, \quad \gamma = \frac{3 C_M \rho_f}{4 \pi \rho_p} \omega. \quad (2)$$

Начальные условия к системе дифференциальных уравнений (2)

$$x_0 = b, \quad y_0 = \left(L - \frac{b}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha, \quad u_0 = w_\tau \cos \alpha + w_n \sin \alpha, \quad v_0 = -w_\tau \sin \alpha + w_n \cos \alpha. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (2) с начальными условиями (3) показало, что на рассматриваемых расстояниях вращение сферы на траекторию движения центра масс не успевает повлиять. С погрешностью менее 0,1 % координаты центра масс сферического тела можно рассчитывать по простым формулам:

$$x(t) = x_0 + u_0 t, \quad y(t) = y_0 + v_0 t - 0,5 g t^2.$$

Откуда время и абсцисса падения сферы:

$$t_k = \frac{1}{g} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \right), \quad x_k = x_0 + u_0 t_k.$$

Для определения степени влияния проскальзывания в точке соударения тел на кинематику тел после удара был проведен опыт [2].

В опыте использована пластина из нержавеющей стали, ее размеры – 173 × 121 мм, толщина 4 мм (рис. 1). Пластина устанавливалась неподвижно под разными углами α к горизонту. Шарик из нержавеющей шарикоподшипниковой стали диа-

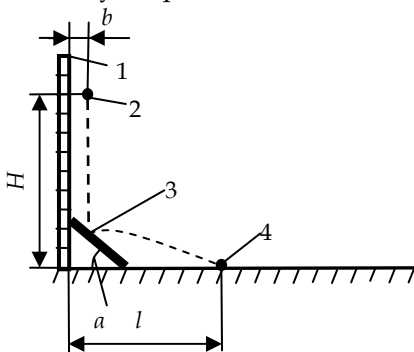


Рис. 1. Схема проведения опыта:

- 1 – мерная линейка, 2 – шарик в начале опыта (перед падением),
- 3 – пластина, 4 – шарик в конце опыта (после отскока от пластины)



метром 6 мм падал на пластину с высоты H без начальной скорости. Расстояние от края стенки до шарика b равнялось 1 см. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,7$, расстояние $b = 1$ см.

Для каждой высоты H и угла α проводилось не менее 10 замеров. Результаты опыта приведены в таблице. В ней представлены точечные оценки математического ожидания абсциссы падения шарика при различных высотах H и углах падения α . При $\alpha < 50^\circ$ реализуются условия удара о абсолютно шероховатую стенку ($\mu \geq \psi$), величина μ не влияет на результаты расчета. При больших углах падения влияние величины μ много меньше, чем k .

Абсцисса падения шарика

Угол падения (градусы)	Высота падения, м			
	0,4	0,5	0,6	0,7
30	0,389	0,471	0,491	0,523
40	0,270	0,308	0,333	0,371
50	0,226	0,243	0,276	0,311
60	0,180	0,190	0,217	0,219

Вначале была выдвинута обычно используемая гипотеза, что коэффициент восстановления оставался постоянным во всех опытах. С помощью специально разработанного алгоритма было установлено, что наименьшее среднеквадратическое отклонение результатов расчетов от опытных данных X^* получается при $k = 0,625$.

Значение $X^* = 0,042$ составляет до 23 % от абсциссы осаждения, поэтому гипотеза $k = \text{const}$ была отвергнута. Разработанный алгоритм использовался для поиска значений коэффициента восстановления при фиксированных углах падения, чтобы обеспечить наименьшее среднеквадратическое отклонение результатов расчетов от опытных данных. Результаты расчетов представлены на рисунке 2. Доверительные интервалы показывают, что до угла $\alpha_{\text{кр}} = 40^\circ$ можно считать $k = \text{const}$, а при $\alpha \geq \alpha_{\text{кр}}$ функция $k(\alpha)$ возрастает.

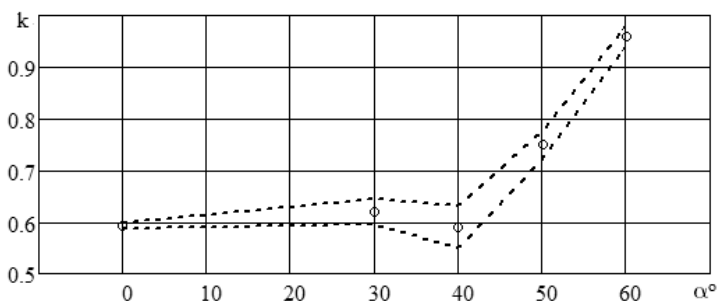


Рис. 2. Зависимость коэффициента восстановления от угла падения.

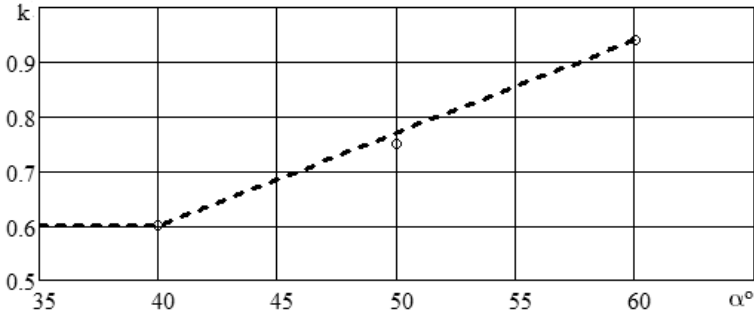
Точки — результат обработки опытных данных.

Штриховые линии — доверительный интервал



В первом приближении можно записать:

$$k(\alpha) = \begin{cases} 0,60 + 0,68(\alpha/\alpha_{кр} - 1), & \alpha > \alpha_{кр}, \\ 0,60, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$



40

Рис. 3. Зависимость коэффициента восстановления от угла падения.
Точки – результат обработки опытных данных.
Штриховая линия – расчет по формуле (4)

Опытные данные, полученные в работе [3] для мелких частиц и высоких скоростей (более 100 м/с), качественно согласуются с зависимостью (4).

На рисунках 4, 5 показано, что результаты расчетов с использованием (4) хорошо согласуются с опытными данными и могут быть использованы в инженерной практике при выполнении расчетов упругого удара тела о наклонную поверхность.

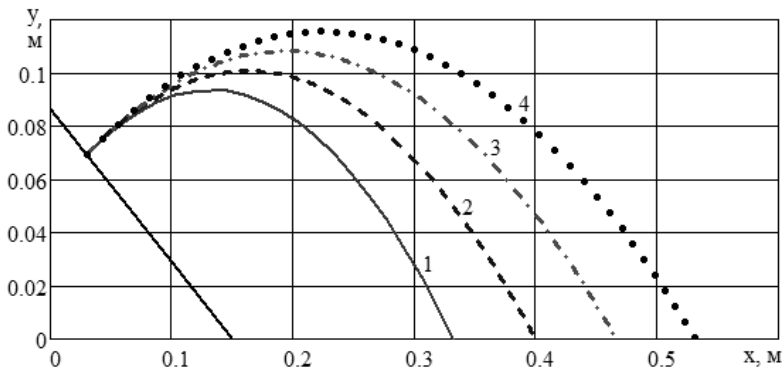


Рис. 4. Рассчитанные траектории движения сферы после удара при $\alpha = 30^\circ$:
1 – $H = 0,4$ м; 2 – $H = 0,5$ м; 3 – $H = 0,6$ м; 4 – $H = 0,7$ м

Из рисунков 6, 7 видно, что изменение значения k заметно больше влияет на результаты расчетов, чем изменение величины μ .

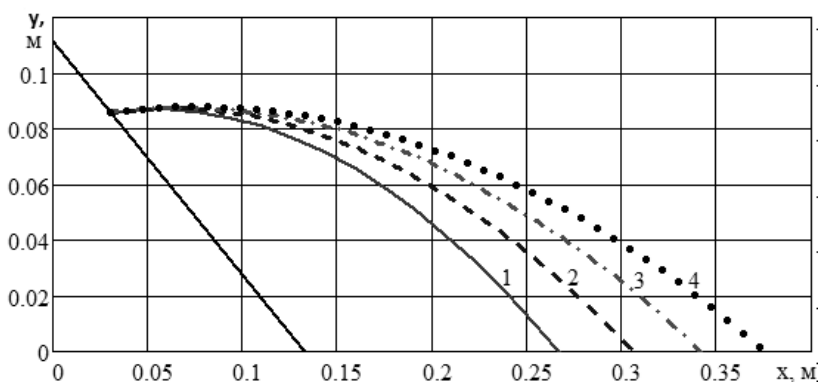


Рис. 5. Рассчитанные траектории движения сферы после удара при $\alpha = 40^\circ$:
 1 – $H = 0,4$ м; 2 – $H = 0,5$ м; 3 – $H = 0,6$ м; 4 – $H = 0,7$ м

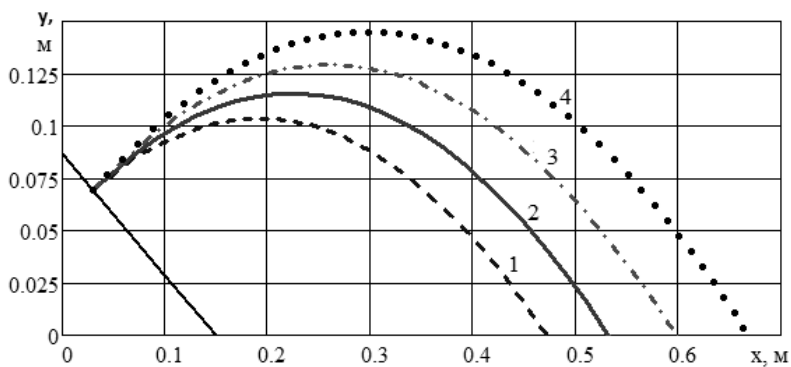


Рис. 6. Зависимость траектории от коэффициента восстановления при $\alpha = 30^\circ$:
 1 – $k = 0,55$; 2 – $k = 0,60$; 3 – $k = 0,65$; 4 – $k = 0,70$

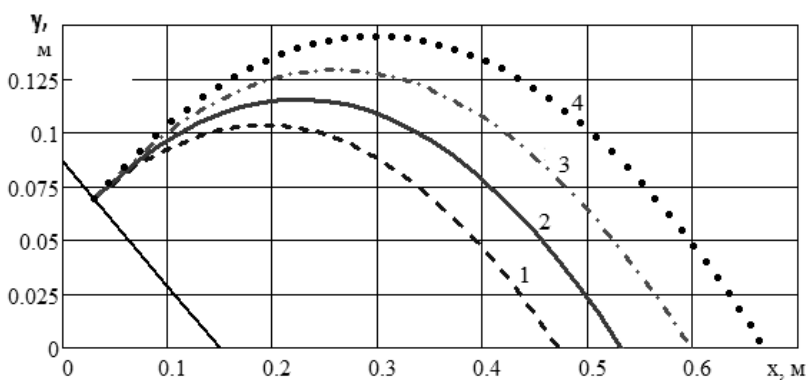


Рис. 7. Зависимость траектории от коэффициента трения при $\alpha = 50^\circ$, $k = 0,75$:
 1 – $\mu = 0,01$; 2 – $\mu = 0,1$; 3 – $\mu = 0,15$; 4 – $\mu = 0,2$



Список литературы

1. Великанов Н. Л., Наумов В. А., Примак Л. В. и др. Совершенствование предпроектных расчетов по ударному разрушению строительных конструкций // Механизация строительства. 2011. №9. С. 29–32.
2. Великанов Н. Л., Тарасов Д. А. Удар с проскальзыванием тела о неподвижную наклонную поверхность // Вестник Российской академии естественных наук : сборник научных трудов ФГОУ ВПО «КГТУ» и ЗНЦ НЦ РАЕН. Калининград, 2012. С. 3–9.
3. Лаишов В. А. Коэффициенты восстановления скорости при ударе частиц газозвеси о поверхность тела : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2012.
4. Лапшин В. В. Удар о поверхность тела с дополнительной опорой // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Сер. : Естественные науки. М., 2006. С. 45–53.
5. Лапшин В. В., Пожалостин А. А. Упругий удар тела о поверхность : сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. М., 2006. Вып. 26. С. 87–100.
6. Великанов Н. Л., Корягин С. И. Абсолютно неупругое поперечное соударение груза и неподвижной балки // Вестник машиностроения. 2005. №8. С. 25–26.
7. Великанов Н. Л., Корягин С. И. Расчет параметров накладных листов металлоконструкций // Там же. 2012. №12. С. 22–24.

Об авторах

Николай Леонидович Великанов – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Владимир Аркадьевич Наумов – д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Калининград.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

Денис Алексеевич Тарасов – асп., Калининградский государственный технический университет, Калининград.

E-mail: denist007@gmail.com

About the author

Prof Nikolay Velikanov – I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: NVelikanov@kantiana.ru

Prof Vladimir Naumov – Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof Sergey Koryagin – I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

Denis Tarasov – PhD student, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.

E-mail: denist007@gmail.com