бираем точку A, неинцидентную прямым ℓ и m, через эту точку проводим прямые, параллельные ℓ и m. В пересечении с прямыми m и ℓ получим точки A_1 и A_2.

С текущей точкой плоскости π совмещаем подвижной репер $\widetilde{R}=\{0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ такой, что $0\equiv A$ и $\bar{e}_J=\overline{AA}_J$. Образующий элемент комплекса – эллипсоид q, соответствующий центру A, однозначно определяется точками A_J, центром A и сопряженными направлениями $\overline{AA}_J$. При движении точки A в плоскости π получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов q, а при перемещении точки A_3 по прямой $\widetilde{\ell}$ получается комплекс квадрик q, который мы назовем комплексом $\overline{K}^{01}_{3*}$.

Можно доказать, что построенный таким образом комплекс эллипсоидов q совпадает с комплексом $\overline{K}^{01}_3$, т.е. определяется в репере $\widetilde{R}$ системой дифференциальных уравнений Пфаффа (1).

Список литературы

1. Кретов М.В. О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т, Калининград, 1981, 22 с., библиограф. 17 назв. (Рукопись деп. ВИНИТИ АН СССР 17 ноября 1981г., № 5272-81 Деп.)

2. Кретов М.В. Дифференциальная геометрия соответствий, ассоциированных с комплексами эллипсоидов.-Тезисы докладов УI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984, с.66.

3. Кретов М.В. О специальных подклассах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984, вып.15, с.49-54.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. Тр. геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, т.6, с.113-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

В.С.Малаховский

СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЕМ ГИПЕРКВАДРИК

Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n, в каждом касательном пространстве $\mathcal{D}^1_n$ которого задана центральная невырожденная гиперквадрика Q.

Исследуются структуры, порождаемые на M_n полем гиперквадрик Q.

Пусть ω^i -базовые 1-формы гладкого многообразия M_n. Имеем [1]:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,$$
$$d\omega^j_i=\omega^k_i\wedge\omega^j_k+\omega^k\wedge\omega^j_{ik},\qquad (1)$$
$$d\omega^j_{i_1i_2\dots i_p}=\sum_{s=1}^{p}\frac{1}{s!(p-s)!}\,\omega^k_{(i_1\dots i_s}\wedge\omega^j_{i_{s+1}\dots i_p)k}+\omega^k\wedge\omega^j_{i_1\dots i_pk}.$$

Обозначим через x^i -координаты вектора $x\in\mathcal{D}^1_n$ или, что то же, координаты точки x центроаффинного пространства $\mathcal{D}^1_n$ относительно базиса $\{e_i\}$. Имеем:

$$x=x^i\vec{e}_i. \qquad (2)$$

Уравнение центральной невырожденной гиперквадрики $Q\in\mathcal{D}^1_n$ с центром

$$C=c^ie_i \qquad (3)$$

запишется в виде:

$$a_{ij}x^i(x^j-2c^j)-1=0, \qquad (4)$$

причем

$$\det\|a_{ij}\|\neq0. \qquad (5)$$

Формы Пфаффа

$$\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\,\omega_i^k - a_{ik}\,\omega_j^k, \quad \nabla c^i = dc^i + c^k\omega_k^i \tag{6}$$

являются структурными формами гиперквадрики Q. Так как на многообразии M_n задано поле геометрического объекта $\{a_{ij}, c^k\}$, то

$$\nabla a_{ij} = a_{ijk}\,\omega^k, \quad \nabla c^i = c^i_j\,\omega^j. \tag{7}$$

Продолжая систему (7), находим

$$\Delta a_{ijk} = a_{ijkh}\,\omega^h, \quad \Delta c^i_j = c^i_{jk}\omega^k, \tag{8}$$

где

$$\Delta a_{ijk} = \nabla a_{ijk} - a_{hj}\,\omega^h_{ik} - a_{ih}\,\omega^h_{jk},$$
$$\Delta c^i_j = \nabla c^i_j - c^k\,\omega^i_{kj}, \tag{9}$$

причем

$$a_{ijk} = a_{jik}, \quad a_{ijkh} = a_{ijhk}, \quad c^i_{jk} = c^i_{kj}. \tag{10}$$

Уравнения (7) показывают, что многообразие M_n является римановым многообразием, на котором задано поле контравариантного вектора $\{c^i\}$.

Обозначим через a^{ij} приведенные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$, т.е.

$$a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k. \tag{11}$$

Объект связности Леви-Чивита $\{\Gamma^k_{ij}\}$ на многообразии задается формулой:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}a^{kh}\,(a_{hij} + a_{hji} - a_{ijh}). \tag{12}$$

Имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \tag{13}$$

$$\nabla\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij} = \Gamma^k_{ijh}\,\omega^h, \tag{14}$$

где

$$\Gamma^k_{ijm} = \frac{1}{2}(a^{kh}\,(a_{hijm} + a_{hjim} - a_{ijhm}) - a^{kp}a^{hq}a_{pqm}(a_{hij} - a_{hji} - a_{ijh}). \tag{15}$$

Формы Пфаффа

$$\tilde{\omega}^j_i = \omega^j_i - \Gamma^j_{ik}\,\omega^k \tag{16}$$

являются формами связности, определяемой объектом [2]. Находим:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_k,$$
$$d\tilde{\omega}^j_i = \tilde{\omega}^k_i \wedge \tilde{\omega}^j_k + \frac{1}{2}R^j_{ikh}\,\omega^k \wedge \omega^h, \tag{17}$$

где

$$R^j_{ikh} = \Gamma^j_{ikh} - \Gamma^j_{ihk} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^j_{hp} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^j_{kp} \tag{18}$$

-тензор кривизны риманова пространства M_n.

Рассмотрим систему величин

$$F^j_i = c^j_i + c^k\,\Gamma^j_{ik}. \tag{19}$$

Имеем

$$dF^j_i = F^j_{ik}\omega^k + F^j_k\,\omega^k_i - F^k_i\,\omega^j_k, \tag{20}$$

где

$$F^j_{ik} = c^j_{ik} + c^h_k\,\Gamma^j_{ih} + c^h\,\Gamma^j_{hik}. \tag{21}$$

Следовательно $\{F^j_i\}$ -аффинор. Он определяет на многообразии M_n аффинную структуру.

Вектор

$$f^i = c^j F^i_j \tag{22}$$

задает в центроаффинном пространстве $\mathcal{D}^1_n$ инвариантную точку. Дважды ковариантный симметрический тензор

$$g_{ij} = a_{ik}F^k_j + a_{jk}F^k_i \tag{23}$$

задает на M_n ассоциированную риманову метрику, отличную в общем случае от метрики, определяемой тензором $\{a_{ij}\}$. Налагая дополнительные требования на аффинор $\{F^j_i\}$, мы получим различные классы гладких многообразий рассматриваемого типа. Например, если

$$F^k_i F^j_k = \varepsilon\,\delta^j_i, \quad \varepsilon^2 = 1, \tag{24}$$

то многообразие M_n оказывается наделенным структурой почти произведения (при $\varepsilon = +1$) или почти комплексной структурой (при $\varepsilon = -1$) [2].

При исследовании комплекса $\mathcal{K}$ гиперквадрик в аффинном пространстве A_n также возникает риманова связность Γ, не являющаяся в общем случае связностью Леви-Чивита. Выбором репера $R = \{A, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ приводим уравнение гиперквадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса $\mathcal{K}$ соответственно к виду:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 - 1 = 0, \qquad (25)$$

$$\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta_\alpha = 2 b^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\gamma. \qquad (26)$$

Полагая

$$\hat{\omega}^\alpha_\beta = \frac{1}{2} (\omega^\alpha_\beta - \omega^\beta_\alpha), \qquad (27)$$

находим

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \hat{\omega}^\alpha_\beta + \frac{1}{2} S^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \qquad (28)$$

$$d\hat{\omega}^\beta_\alpha = \hat{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \hat{\omega}^\beta_\gamma + \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha\gamma\eta} \omega^\gamma \wedge \omega^\eta, \qquad (29)$$

где

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = b^\alpha_{\beta\gamma} - b^\alpha_{\gamma\beta}, \quad R^\beta_{\alpha\gamma\eta} = b^\jmath_{\alpha\gamma} b^\beta_{\jmath\eta} - b^\jmath_{\alpha\eta} b^\beta_{\jmath\gamma} \qquad (30)$$

-тензоры кручения и кривизны Γ.

Список литературы

1.Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.-Тр.геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР,1974,т.6,с.113-134.

2.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,т.9.Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР.М.,1979.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

М.Н. М а р ю к о в

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ П-ПРОСТРАНСТВ

В данной работе рассматриваются некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и $\overline{\Omega}$ пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Находится необходимое и достаточное условие их соответствия в отображении f.

В евклидовом пространстве E_n даны две области Ω и $\overline{\Omega}$ и диффеоморфизм $f: \Omega \to \overline{\Omega}$. Предполагается, что в области Ω задано распределение Δ_p $(1 \le p < n)$, а в области $\overline{\Omega}$ -распределение $\widetilde{\Delta}_p$.

Пусть в главном нормальном пространстве N_q распределения Δ_p [2] зафиксировано поле одномерной нормали $[x, \vec{n}_0]$, где $\vec{n}_0$ -орт этой нормали. Для точки F, принадлежащей данной нормали, имеем $\vec{F} = \vec{x} + \rho \vec{n}_0$. Направления кривизны площадки $\Delta_p(x)$ относительно нормали $[x, \vec{n}_0]$ ([1], [2]) определяются требованием $d\vec{F} \in \Delta_{n-p}(x)$ при $d\vec{x} \in \Delta_p(x)$,

$$d\vec{F} \in \Delta_{n-p}(x) \quad \text{при} \quad d\vec{x} \in \Delta_p(x), \qquad (1)$$

где $\Delta_{n-p}(x)$ -площадка, ортогонально дополнительная к $\Delta_p(x)$. В области Ω выберем подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где единичные векторы $\vec{e}_i \in \Delta_p(x)$, $\vec{e}_\alpha = \Delta_{n-p}(x)$, причем $\vec{e}_{\alpha_0} = \vec{n}_0$ $(i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n)$. Требование (1) приводит к системе $\omega^i + \rho\, \omega^i_{\alpha_0}$. Дифференцирование тождеств $\vec{e}_{\alpha_0} \cdot \vec{e}_i = 0$ дает $\gamma_{ij} \omega^j_{\alpha_0} + \omega^{\alpha_0}_i = 0$. Отсюда следует, что формы $\omega^j_{\alpha_0}$-главные и $\omega^j_{\alpha_0} = -\gamma^{j\ell} \Lambda^{\alpha_0}_{\ell L} \omega^L$ $(L = 1, 2, \ldots, n)$. Здесь $\Lambda^{\alpha_0}_{\ell L}$-подобъект первого фундаментального объекта распределения Δ_p. Учитывая, что при $d\vec{x} \in \Delta_p(x)$ формы ω^α равны нулю, для определения направлений кривизны площадки $\Delta_p(x)$ имеем систему

$$(\delta^i_j + \rho\, a^i_j)\, \omega^j = 0, \qquad (2)$$