Список литературы

1. *Жовтенко О.М.* Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. Вып. 31. С. 14 – 19.

2. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43 – 110.

3. *Шевченко* Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1978. Вып. 9. С. 124 – 133.

4. *Лумисте Ю.Г.* Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей // Мат. сб.1973. Т. 91. Вып. 2. С. 211 – 233.

O. Zhovtenko

GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE CONNECTION, ASSOCIATED WITH THE CONGRUENCE OF PLANES

The research of group connection in the bundle associated with the congruence of planes is continued [1]. The geometrical performance of subobjects of this connection by means of the central projection and parallel displacements is given.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб.КЦФЕ), кандидатский проект М03–2.1К–315.

УДК 514.76

В.А. Игошин, Е.К. Китаева
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КВАДРАТИЧНЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В качестве приложения геометрического (геодезического, пульверизационного) моделирования [1] получен ряд результатов о подвижности и геометрических характеристиках квадратичных квазигеодезических потоков (КП) ненулевой кривизны. В частности, доказана теорема существования (теорема 2) и теоремы 3, 4 о полях абсолютного параллелизма в пространстве событий квазигеодезических потоков исследуемого класса.

1. Пусть М – (n-1)-мерное многообразие, $f \equiv (M, f)$ – КП на М, имеющий в произвольной карте следующее координатное выражение:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i\left(x^j,\ t,\ \frac{dx^j}{dt}\right),$$

где $i,\ j = 1, \ldots, n-1$. Все объекты, фигурирующие в работе, предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

Поток $f = (M, f)$ называется [2; 3] квадратичным, или потоком второй степени (по скорости – первым производным $\frac{dx^i}{dt}$), если правые части f^i его координатного уравнения являются полиномами второй степени по $\frac{dx^i}{dt}$:

$$f^i = -\Gamma^i_{jk}\left(x^s, t\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - 2B^i_j\left(x^s, t\right)\frac{dx^j}{dt} - A^i\left(x^s, t\right),$$

где Γ^i_{jk} – коэффициенты некоторой, зависящей от t симметричной аффинной связности на М, а B^i_j, A^i – компоненты тензорных полей на М, также зависящих от t, тип которых обозначен индексами $i,\ j,\ k, s = 1, \ldots, n-1$.

Рассматриваемая на М неавтономная симметричная аффинная связность $\Gamma^i_{jk}\left(x^s, t\right)$ при фиксированном значении t является аффинной симметричной связностью на М. Она определяет параллельный перенос, тензор кривизны R^i_{jkl} и другие понятия. Для нее справедливы теоремы, аналогичные теоремам (см.[4]) об автономной связности, и в частности

Теорема 1. *Если тензор кривизны* $R^i_{jkl}(x^s, t) = 0$ *для аффинной связности* $\Gamma^i_{jk}(x, t)$*, то эта связность будет локально аффинно-эквивалентна евклидовой связности. Точнее говоря, существует локальное преобразование (замена координат) базового многообразия М вида:*

$$(x^k) \to x^{k'} = x^{k'}(x^k, t), -$$

которое при каждом фиксированном значении параметра t будет аффинной эквивалентностью связности $\Gamma^i_{jk}(x, t)$ *и евклидовой связности* $\Gamma^{i'}_{j'k'} \equiv 0.$

2. В пространстве $\overline{M} = M \times R$ событий КП определена стандартная аффинная связность $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(\overline{x}^{\delta}, \dot{\overline{x}}^{\delta})$ квадратичного потока f следующими формулами [5]:

$$\overline{\Gamma}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk},\ \ \overline{\Gamma}^{i}_{jn} = B^{i}_{j},\ \overline{\Gamma}^{i}_{nn} = A^{i},\ \overline{\Gamma}^{n}_{\alpha\beta} = 0\,.$$

С помощью теоремы 1 и теоремы 3 из [6] получен следующий результат.

Теорема 2. *Существует единственный квадратичный максимально подвижный КП ненулевой кривизны, удовлетворяющий условиям*

$$R^{i}_{jkl} = 0;\ \ \partial_n \Gamma^{i}_{jl} = B^{i}_{l,j};\ \ \partial_n B^{i}_{j} + B^{i}_{s} B^{s}_{j} - A^{i}_{,j} + \varepsilon \delta^{i}_{j} \lambda^{2}_{n} = 0; \qquad (1)$$

$$R_{\alpha,\beta} = \varepsilon (n-1) \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}\,, \qquad (2)$$

$$\lambda_{\alpha,\beta} = c \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}\,, \qquad (3)$$

при каждом фиксированном значении постоянной c в уравнении (3), который в аффинно-евклидовой (по отношению к базовой связности $\Gamma^{i}_{jk}(x^{s}, t)$*) системе координат определяется следующими соотношениями:*

$$\Gamma^{i}_{jk} = 0,\ \ B^{i}_{j} = B^{i}_{j}(t, \tilde{B}^{k}_{l}, t_o),\ \ A^{i} = a^{i}_{k}(t) x^{k} + b^{i}(t)\,,$$

где $\tilde{B}^{k}_{l}$ *– начальные значения аффинорного поля* B^{i}_{j}, $a^{i}(t)$, $b^{i}(t)$ *– произвольные дифференцируемые функции от t;* $\lambda_{\alpha} = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^{\alpha}}$ *– коградиент некоторой функции* λ *на* $\overline{M}$; $\lambda_i = 0$, $\lambda_n \neq 0$; *запятая в формуле (1) обозначает ковариантную производную в связности* Γ^{i}_{jk} *на M, а в последних двух – в связности* $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *на* $\overline{M}$.

3. Разберемся в геометрической сути условий (1 – 3), характеризующих максимально подвижные КП ненулевой кривизны.

Теорема 3. *Проективно-евклидов КП* (M, f), $\dim M = n-1$, *пространство событий* $\overline{M} = M \times R$ *которого допускает, по крайней мере, одно поле абсолютно параллельных контравариантных векторов, необходимо является эквиаффинным КП (n > 2).*

Доказательство. Пусть (M, f), $\dim M = n-1$, – проективно-евклидов КП, а пространство событий $(\overline{M} = M \times R, \overline{\Gamma})$ потока (M, f) допускает, по крайней мере, одно поле абсолютно параллельных контравариантных векторов. В силу теоремы 12 из статьи [6] пространство событий $\overline{M}$ является эквиаффинным пространством, и, следовательно, эквиаффинным является поток (M, f).

Теорема 4. *Поток* (M, f) *ненулевой кривизны тогда и только тогда будет максимально подвижным, когда он является проективно-евклидовым и его пространство событий* $(\overline{M} = M \times R, \overline{\Gamma})$ *допускает точно n-1 независимых абсолютно параллельных векторных полей* $(n \geq 4)$.

Доказательство. Пусть КП (M, f) – поток ненулевой кривизны, т.е. таковым является его пространство событий $\overline{M}$. В силу теоремы 13 из работы [6] и определения проективно-евклидового КП следует утверждение данной теоремы.

Теорема 5. *Если* (M, f) *максимально подвижный КП ненулевой кривизны, то каждая гиперповерхность* $\lambda(x^1, \ldots, x^m) = c$ *его пространства событий* $\overline{M} = M \times R$ *является вполне геодезической* $(n \geq 4)$.

Доказательство. Пусть (M, f) – максимально подвижный КП ненулевой кривизны, т.е. таковым является его пространство событий $\overline{M} = M \times R$. Так как $\lambda = \lambda(t)$, то гиперповерхности $\lambda = c$ совпадают с гиперповерхностями $t = \mathrm{const}$, которые являются вполне геодезическими для любого квадратичного КП, так как линейная форма Пфаффа dt – первый интеграл для произвольного квадратичного КП (M, f) (см. теорему 1 из работы [5]).

Список литературы

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 531 – 535.

2. *Шапиро Я.Л.* О квазигеодезическом отображении // Изв. вузов. Мат. 1980. № 9. С. 53 – 55.

3. *Игошин В.А.* Гомоморфизмы квазигеодезических потоков второй степени // Там же. Мат. 1990. № 9. С. 14 – 21.

4. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967. 664 с.

5. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование I, II, III // Изв. вузов. Мат. 1992. № 6. С. 63 – 70; 1994. № 10. С. 26 – 32; 1995. № 5. С. 39 – 50.

6. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Казань, 1965. С. 5 – 179.

7. *Игошин В.А., Китаева Е.К.* Об аффинных симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 49 – 52.

8. *Они же*. Максимально подвижные квадратичные квазигеодезические потоки ненулевой кривизны // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 41 – 44.

V. Igoshin, E. Kitaeva

ABOUT GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF THE QUADRATIC QUASIGEODESIC FLOWS

As application of geometrical modelling [1] a series of results about mobility and geometrical characteristics of quadratic quasigeodesic flows (QF) with nonzero curvature it is received. In particular, it is proved the following

Theorem 4. *In order that a QF (M, f) with nonzero curvature have a maximal mobility, it is necessary and sufficient that the QF be projectively Euclidean and its events space have admits exactly n-1 of linearly independent vector fields of absolute parallelism (n = dimM >3).*

УДК 514.76

В.А. Игошин, Н.В. Коткова
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)*

О ПРОЕКТИВНО РИМАНОВЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

С помощью пульверизационного моделирования [1; 2] и результатов [3] получены теоремы о существовании римановой связности, проективно эквивалентной заданной симметричной аффинной связности, а также связности одномерного квазигеодезического потока (КП).

1. Пусть M – двумерное многообразие. На M задана произвольная симметричная аффинная связность $\overline{\Gamma}$ коэффициентами $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\delta})$