Замечание. Изложенный прием задания однородной связности отличается от опубликованного в работе [5].

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. Т.2.1953. С. 275 – 382.
2. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. 1966. Т. 69. С. 434 – 469.
3. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. 1961.
4. *Близникас В.И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский мат. сб. 1966. №2. С.141 – 209.
5. *Шевченко Ю.И.* О фундаментально-групповой связности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1985. №16. С.104 – 109.

K. Polyakova

ON THE GIVING OF HOMOGENEOUS CONNECTION

Bliznikas` method for the giving of differential geometric connection in the homogeneous fiber bundle of Laptev`s elements space is modernized.

УДК 514.75

Ю.И. Попов

(Калининградский государственный университет)

ИНВАРИАНТНЫЕ ОСНАЩЕНИЯ ГИПЕРПОЛОСЫ $H_m(\Delta)$

Рассматривается специальный класс регулярных гиперполос $H_m(\Delta)$, оснащенных (r+1)-мерными плоскостями Δ. Дано задание гиперполосы $H_m(\Delta)$ и приведена теорема существования. Показано, что в дифференциальной окрестности порядка t, где t – порядок поля $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода, к гиперполосе $H_m(\Delta)$ *инвариантно* присоединяются: пучки плоскостей Картана, пучки нормалей 2-го рода распределения характеристик, а в окрестности порядка t+1 – нормализация гиперполосы $H_m(\Delta)$ в смысле Нордена-Тимофеева.

В работе принята следующая схема индексов:

$$J,K,L=\overline{1,n};\quad i,j,k=\overline{1,m};\quad \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1};\quad \nu=\overline{r+1,n-1};$$

$$p,q,t=\overline{1,r};\quad a,b=\overline{r+1,n};\quad \hat{\alpha}=\overline{m+1,n}.$$

Знак « $\equiv$ » означает сравнение по модулю форм ω^i.

§1. Задание гиперполосы $H_m(\Delta)$

Рассмотрим регулярные гиперполосы $H_m \subset A_n$, оснащенные (r+1)-мерными скомпонованными плоскостями $\Delta = [\Lambda, h]$, где $h(A)$ – прямая, $\Lambda \overset{def}{=} \Lambda_r(A)$ – r-мерная плоскость, удовлетворяющие условиям:

$$A \in \Lambda_r(A) \subset T_m(A), \quad \Delta(A) \cap E_{n-m-1}(A) = A,$$
$$A \in h(A),\ h(A) \not\subset \tau(A), \quad A \in V_m, \quad r < m \le n-1,$$

где $E_{n-m-1}(A)$ – характеристика гиперполосы, $T_m(A)$ – касательная плоскость базисной поверхности V_m гиперполосы H_m.

Отнесем пространство A_n к подвижному реперу $\Re = \left(M, \overrightarrow{e_J}\right)$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид:

$$d\overrightarrow{M} = \omega^J \overrightarrow{e_J}, \quad d\overrightarrow{e_J} = \omega_J^K \overrightarrow{e_K}. \tag{1}$$

Инвариантные дифференциальные формы ω^J, ω_J^K аффинной группы удовлетворяют структурным уравнениям Картана:

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K, \tag{2}$$

выражающим условия полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1). Присоединим репер $\Re$ к гиперполосе H_m следующим образом:

$$M \equiv A, \quad \left\{\overrightarrow{e_i}\right\} \subset T_m(A), \quad \left\{\overrightarrow{e_p}\right\} \subset \Lambda(A), \quad \left\{\overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_a}\right\} \subset T_m(A),$$
$$\left\{\overrightarrow{e_\alpha}\right\} \subset E_{n-m-1}, \quad \left\{\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_p}\right\} \subset \Delta(A).$$

Выбранный таким образом репер $\Re$ является репером 1-го порядка $\Re^1$ гиперполосы $H_m(\Delta)$. Относительно репера $\Re^1$ гиперполоса $H_m(\Delta)$ задается уравнениями:

$$\begin{aligned} &\omega^\alpha = 0,\ \omega^n = 0,\ \omega_\alpha^n = 0, \\ &\omega_p^n = b_{pi}^n \omega^i, \qquad \omega_a^n = b_{ai}^n \omega^i, \qquad \omega_p^\alpha = \lambda_{pi}^\alpha \omega^i, \qquad \omega_a^\alpha = \lambda_{ai}^\alpha \omega^i, \\ &\omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha i}^p \omega^i, \qquad \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a \omega^i, \qquad \omega_p^a = \lambda_{pi}^a \omega^i, \qquad \omega_n^\upsilon = L_i^\upsilon \omega^i; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\nabla b_{ij}^n = b_{ijk}^n \omega^k, \quad \nabla \lambda_{ij}^\alpha = \lambda_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad \nabla \lambda_{\alpha j}^i = \lambda_{\alpha jk}^i \omega^k, \\ &\nabla \lambda_{pq}^a = \lambda_{pqk}^a \omega^k, \quad \nabla \lambda_{pb}^a - \lambda_{pq}^a \omega_b^q = \lambda_{pbk}^a \omega^k, \\ &\nabla L_i^a - L_i^a \omega_n^n - \lambda_{qi}^a \omega_n^q \equiv 0, \quad \nabla L_i^\alpha - L_i^\alpha \omega_n^n - \lambda_{qi}^\alpha \omega_n^q \equiv 0, \end{aligned} \tag{4}$$

а также соотношениями:

$$b_{[ij]}^n = 0,\ \lambda_{[ij]}^\alpha = 0,\ \lambda_{\alpha[i}^k b_{j]k}^n = 0,\ b_{i[jk]}^n = 0,\ \lambda_{i[jk]}^\alpha = L_{[j}^\alpha b_{k]i}^n,\ \lambda_{\alpha[jk]}^i = 0. \tag{5}$$

Геометрические объекты $\Gamma_2 = \left\{b_{ij}^n, \lambda_{ij}^\alpha, \lambda_{\alpha j}^i, \lambda_{pi}^a, L_i^\upsilon\right\}$ и $\Gamma_3 = \left\{\Gamma_2, b_{ijk}^n, \lambda_{ijk}^\alpha, \lambda_{\alpha jk}^i, \lambda_{pij}^a, L_{ij}^\upsilon\right\}$ являются фундаментальными объектами соответственно 2-го и 3-го порядков гиперполосы $H_m(\Delta)$.

Теорема 1. *В n-мерном аффинном пространстве A_n m-мерная гиперполоса $H_m(\Delta)$, оснащенная Δ-плоскостями, существует и определяется с произволом (m+1)(n-m)+m(n-r-2)+r(m-r) функций m аргументов.*

§2. Инвариантные оснащения гиперполосы $H_m(\Delta)$

1. **Определение** [1; 2]. Любую инвариантную (m-r)-мерную плоскость $\nu_{m-r}(A)\subset T_m(A)$, удовлетворяющую условиям:

$$\nu_{m-r}\cap\Lambda=A,\quad [\nu_{m-r},\Lambda]=T_m,\quad A\in\nu_{m-r}(A)$$

назовем TΛ-виртуальной нормалью 1-го рода (ν-плоскостью). Произвольную инвариантную (r-1)-плоскость $\nu_{r-1}(A)\subset\Lambda(A)$, не проходящую через точку A, назовем TΛ-виртуальной нормалью 2-го рода.

Нами показано [2; 3], что дифференциальные уравнения

$$\nabla\nu_a^p+\omega_a^p=\nu_{ai}^p\omega^i \quad (a),\qquad \nabla\nu_a=\nu_{ai}\omega^i \quad (b) \tag{6}$$

задают соответственно поля TΛ-виртуальных нормалей 1-го рода ν_{m-r} (ν-распределение) и 2-го рода ν_{r-1}.

Прежде всего для простоты изложения адаптируем репер $\Re^1$ полю нормалей 1-го рода, т.е. положим, что $\overrightarrow{e_n}\| N_{n-m}(A)$. В этом случае формы ω_n^p становятся главными:

$$\begin{aligned}&\omega_n^p=L_i^p\omega^i,\ \nabla L_q^p+L_q^a\omega_a^p-L_q^p\omega_n^n\equiv0, &&(a)\\ &\nabla L_a^p-L_t^p\omega_a^t+L_a^b\omega_b^p\equiv0. &&(b)\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть задано инвариантное поле TΛ-виртуальных нормалей 1-го рода ν_{m-r} полем квазитензора ν_a^p (6a). Рассмотрим на базисной поверхности $V_m\subset H_m(\Delta)$ поля нормалей 1-го рода Λ-распределения и ν-распределения, т.е. в каждой точке $A\in V_m$ пусть заданы плоскости $\Omega_{n-r}(A)=[N_{n-m}(A),\nu_{m-r}(A)]$ и $\Omega_{n-s}(A)=[N_{n-m}(A),\Lambda(A)]$.

Следуя работе [4], с учетом формул (1 – 7) найдем фокальное многообразие $\Phi_{n-s-1}^s(\Omega_{n-s},\nu)$:

$$x^a=0,\quad \det\left\|\delta_b^a+\left(\lambda_{pb}^a+\lambda_{pq}^a\nu_b^q\right)x^p+\left(\lambda_{\alpha b}^a+\lambda_{\alpha q}^a\nu_b^q\right)x^\alpha+\left(L_b^a+L_q^a\nu_b^q\right)x^n\right\|=0, \tag{8}$$

полученное при смещении точки A вдоль кривых, принадлежащих полю ν-плоскостей. Линейная поляра точки A относительно многообразия $\Phi_{n-s-1}^s\subset\Omega_{n-s}$ (8) есть плоскость $\Pi_{n-s-1}(A)$:

$$x^a=0,\quad 1-\varepsilon_p x^p-\varepsilon_\alpha x^\alpha-\varepsilon_n x^n=0,$$

где

$$\varepsilon_p=-\frac{1}{s}\left(\lambda_{pa}^a+\lambda_{pq}^a\nu_a^q\right),\quad \nabla\varepsilon_p=\varepsilon_{pi}\omega^i;\ \varepsilon_{\hat\alpha}=-\frac{1}{s}\left(\lambda_{\hat\alpha a}^a+\lambda_{\hat\alpha q}^a\nu_a^q\right),\quad \nabla\varepsilon_{\hat\alpha}=\varepsilon_{\hat\alpha i}\omega^i, \tag{9}$$

которая пересекает

а) оснащенную плоскость Λ по TΛ-виртуальной нормали 2-го рода $\nu_{r-1}(A)$:

$$1-\varepsilon_p x^p = 0, \quad x^\upsilon = 0, \quad x^n = 0; \tag{10}$$

б) нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A)$ гиперполосы $H_m(\Delta)$ по плоскости Картана $K_{n-m-1}(\nu)$:

$$1-\varepsilon_\alpha x^\alpha - \varepsilon_n x^n = 0, \quad x^p = 0, \quad x^n = 0; \tag{11}$$

в) характеристику $E_{n-m-1}(A)$ по ее нормали 2-го рода $E_{n-m-2}(A)$:

$$1-\varepsilon_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^p = 0, \quad x^n = 0, \quad x^a = 0.$$

2. Аналогично работе [4] с учетом формул (1 – 7) находим фокальное многообразие $\Psi^r_{n-r-1}(\Omega_{n-r}, \Lambda)$:

$$\begin{cases} x^p - \nu^p_a x^a = 0, \\ \det\left\| \delta^p_q + \left(\nu^p_{aq} - \nu^p_b \nu^t_a \Lambda^b_{tq}\right)x^a + \left(\lambda^p_{\beta q} - \nu^p_{\beta q}\right)x^\beta + \left(L^p_q - \nu^p_b L^b_q\right)x^n \right\| = 0, \end{cases} \tag{12}$$

полученное при смещении точки А вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению. Линейная поляра точки А относительно многообразия Ψ^r_{n-r-1} (12) есть плоскость $\Pi_{n-r-1}(A)$:

$$x^p - \nu^p_a x^a = 0, \quad 1-\rho_a x^a - \rho_\alpha x^\alpha - \rho_n x^n = 0, \tag{13}$$

где

$$\rho_a = -\frac{1}{r}\left(\nu^p_{ap} - \nu^p_b \nu^t_a \Lambda^b_{tp}\right), \quad \nabla\rho_a = \rho_{ai}\omega^i;$$

$$\rho_{\hat\alpha} = -\frac{1}{r}\left(\lambda^p_{\hat\alpha p} - \nu^p_b \lambda^b_{\hat\alpha p}\right), \quad \nabla\rho_{\hat\alpha} = \rho_{\hat\alpha i}\omega^i. \tag{14}$$

Плоскость $\Pi_{n-r-1}(A)$ (13) пересекает:

а) TΛ-виртуальную нормаль 1-го рода по инвариантной Tν-виртуальной нормали 2-го рода ν_{r-1}:

$$1-\rho_a x^a = 0, \;\; x^p - \nu^p_a x^a = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^n = 0; \tag{15}$$

б) нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A)$ гиперполосы $H_m(\Delta)$ по плоскости Картана $C_{n-m-1}(\Lambda)$:

$$1-\rho_\alpha x^\alpha - \rho_n x^n = 0, \quad x^a = 0, \quad x^p = 0; \tag{16}$$

в) характеристику $E_{n-m-1}(A)$ по ее нормали 2-го рода $E_{n-m-2}(A)$:

$$1-\rho_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^a = 0, \quad x^p = 0, \quad x^n = 0.$$

3. Плоскость $P_{m-1}(A) = [\nu_{r-1}(A), \nu_{s-1}(A)]$, натянутая на TΛ-,TL-виртуальные нормали 2-го рода (10; 15), является плоскостью Нордена-Тимофеева неголономной композиции (Λ,ν) [1; 2]:

$$\begin{cases} 1 - p_i x^i = 0, \quad x^\alpha = 0, \\ p_a = \rho_a - \varepsilon_p \nu_a^p, \quad p_q = \varepsilon_q, \quad \nabla p_i = p_{ij}\omega^j. \end{cases} \tag{17}$$

Согласно работе [5] поле нормалей 1-го рода Нордена-Тимофеева можно определить полем квазитензора

$$P^j = -p_i b^{ij} + t^j, \quad \nabla P^i - P^i \omega_n^n + \omega_n^i \equiv 0, \tag{18}$$

где $t^i = b^{ij} t_j, \quad t_j = \dfrac{1}{r+2} b_{pqj} b^{pq}$.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности порядка t+1 поля геометрических объектов* p_i *(17) и* P^i *(18) инвариантно присоединяют к регулярной гиперполосе* $H_m(\Delta)$ *ее двойственную нормализацию в смысле Нордена-Тимофеева, ассоциированную с полем ТΛ-виртуальных нормалей 1-го рода* ν_a^p *порядка t (6а).*

4. Тензоры $\varepsilon_{\hat{\alpha}}$ (9) и $\rho_{\hat{\alpha}}$ (14) задают, вообще говоря, различные плоскости $K_{n\text{-}m\text{-}1}(\nu)$ (11) и $C_{n\text{-}m\text{-}1}(\Lambda)$ (16) в нормали 1-го рода $N_{n-m}(A) \subset H_m(\Delta)$. Таким образом, пучок плоскостей Картана, определяемый плоскостями (11; 16), осью которого является плоскость $C_{n\text{-}m\text{-}2}(A)$:

$$1 - \varepsilon_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad 1 - \rho_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0, \quad x^a = x^p = 0, \tag{19}$$

можно задать пучком тензоров

$$\eta_{\hat{\alpha}}(\sigma) = \varepsilon_{\hat{\alpha}} + (1-\sigma)(\rho_{\hat{\alpha}} - \varepsilon_{\hat{\alpha}}). \tag{20}$$

Отсюда следует

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности порядка t пучок тензоров* $\eta_{\hat{\alpha}}(\sigma)$ *(20) задает в каждой нормали 1-го рода* $N_{n-m}(A) \subset H_m(\Delta)$ *пучок оснащающих плоскостей Картана с осью* $C_{n\text{-}m\text{-}2}(A)$ *(19), ассоциированный с полем ТΛ-виртуальных нормалей 1-го рода* ν_a^p *порядка t.*

Пучок плоскостей Картана (20) высекает в соответствующей характеристике $E_{n-m-1}(A) \subset H_m(\Delta)$ пучок ее нормалей 2-го рода, осью которого является плоскость $E_{n\text{-}m\text{-}3}(A)$:

$$1 - \varepsilon_\alpha x^\alpha = 0, \quad 1 - \rho_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^a = 0, \quad x^p = 0. \tag{21}$$

Указанный пучок нормалей 2-го рода задается пучком тензоров

$$\eta_\alpha(\sigma) = \varepsilon_\alpha + (1-\sigma)(\rho_\alpha - \varepsilon_\alpha). \tag{22}$$

Теорема 4. *Пучок тензоров (22) в каждой характеристике* $E_{n-m-1}(A) \subset H_m(\Delta)$ *задает пучок нормалей 2-го рода этой характеристики, осью которого является плоскость* $E_{n\text{-}m\text{-}3}(A)$ *(21).*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Монография. СПб., 1992.

2. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

3. *Попов Ю.И.* Регулярные гиперполосы $H_m(\Delta)$ аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998. Деп. в ВИНИТИ 16.11.98, №3341-В98.
4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. С. 49 – 94.
5. *Попов Ю.И.* Общая теория гиперполос аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1998. Деп. в ВИНИТИ 16.11.98, №3342-В98.

Yu. Popov

INVARIANT EQUIPMENTS OF HYPERSTRIP $H_m(\Delta)$

Special class of regular hyperstrip $H_m(\Delta)$, equipped by (r+1)-dimensional planes Δ, is considered. The giving for the hyperstrip is produced and existence theorem is adduced. It is shown, in differential neighbourhood of order t, where t – order for field of $T\Lambda$-virtual normals of the 1-st kind , to the hyperstrip $H_m(\Delta)$ one can join: bunch of Cartan`s planes, bunch of normals of the 2-nd kind for characteristics distribution, and in neighbourhood of order t+1 – normalisation for hyperstrip in the Norden-Timofeev`s sence.

УДК 514.75

А.В. Скрягина

(Калининградский государственный университет)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОСНАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В проективном пространстве P_n плоскостная m-поверхность рассмотрена как семейство M_r пар образующей L_h и ее 1-й дифференциальной окрестности T_{m+hr}. Произведено композиционное оснащение плоскостной поверхности, состоящее в задании полей обобщенной нормали 2-го рода $P_{r(h+1)-1}$, дополняющей образующую L_h до касательного пространства T_{m+hr}, и обобщенной плоскости Картана $P_{n-m-hr-1}$, дополняющей касательное пространство T_{m+hr} до объемлющего P_n. Это оснащение индуцирует в ассоциированном расслоении пучки связностей 1-го и 2-го типов. Найдены и геометрически охарактеризованы условия их совпадения. Введены и использованы специальные случаи обобщенных нормализации 2-го рода и оснащения Картана.

Продолжим изучение плоскостной поверхности S_m, представленной как r-мерное многообразие M_r пар плоскостей (L_h, T_{m+hr}). Оснащающие плоскости $P_{r(h+1)-1}$, $P_{n-m-hr-1}$ задаются совокупностями точек:

$$B_p = A_p + \lambda_p^a A_a + \lambda_p A,\ B_\sigma = A_\sigma + \lambda_\sigma^a A_a + \lambda_\sigma^p A_p + \lambda_\sigma A;$$

$$(\,a,... = \overline{1,h};\ \ p,... = \overline{h+1, m+hr};\ \ \sigma,... = \overline{m+hr+1, n};\ \ i = \overline{h+1, h+r}\,).$$