УДК 514.756.2

Т.Н. Андреева
(Чувашский государственный педагогический университет)

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ПОЛНЫМ ОСНАЩЕНИЕМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Работа посвящена изучению конформных и аффинных связностей, индуцируемых полным оснащением гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n.

Во всей работе индексы принимают следующие значения: $i, j, k, l, s, t = \overline{l, n-1}$; $I, J, K, L = \overline{1, n}$; $a, b, c = \overline{0, n-1}, n+1$; $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$.

1. Рассмотрим гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n (n \geq 3)$, отнесенную к полуизотропному [2] полуортогональному реперу первого порядка $R = \{A_\lambda\}$; в этом репере справедливо $\omega_0^n = 0$ $\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j$, $\omega_n^k = \Lambda_{nj}^k \omega_0^j$, $\Lambda_{[ij]}^n = 0$; при этом матрица (n+1)-го порядка $\|(A_\lambda A_\mu)\| = \|g_{\lambda\mu}\|$ имеет строение:

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

причем метрический тензор g_{ij} и относительный инвариант g_{nn} являются невырожденными.

2. Касательное оснащение [1, 7] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем гиперсфер $P_n = A_n + x_n^0 A_0$ определяется заданием поля квазитензора x_n^0 : $\nabla x_n^0 + \omega_n^0 = x_{nk}^0 \omega_0^k$. Во второй дифференциальной окрестности охват $\Lambda_n \stackrel{def}{=} -\frac{1}{n-1} \Lambda_{nj}^j$ внутренним образом определяет касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$. Система из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\{\overset{0}{\Omega}{}_b^a\}$ [6] удовлетворяет структурным уравнениям пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ [6]. Справедлива

Теорема 1. *Инвариантное касательное оснащение гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$ *полем гиперсфер* P_n *индуцирует пространство конформной связности* $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ *с полем метрического тензора* g_{ij}, *причем это пространство является пространством без кручения.*

3. Условием неподвижности касательной гиперсферы P_n является выполнение одной из групп соотношений $\tilde{\Lambda}_{nk}^l(x) \stackrel{def}{=} \Lambda_{nk}^l + \delta_k^l x_n^0 = 0$, $x_{nk}^0 = 0$; при этом функция x_n^0 совпадает с Λ_n: $x_n^0 \equiv \Lambda_n$. В этом случае исходная гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$ совпадает с неподвижной гиперсферой $P_n = A_n + \Lambda_n A_0$. Кроме того, неподвижность касательной гиперсферы P_n равносильна тому, что пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является плоским.

4. Предположим, что задано полное оснащение [1, 7] гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, т.е. кроме ее касательного оснащения полем гиперсфер P_n задано нормальное оснащение подмногообразия V_{n-1} полем окружностей $[P_i]$, $P_i = A_i + x_i^0 A_0$,

определяемым полем квазитензора x_i^0 [1]: $\nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{ij}^0 \omega_0^j$. Доказана

Теорема 2. *Инвариантное полное оснащение гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$ *полем квазитензора* x_l^0 *индуцирует нормализованное [5] пространство конформной связности* $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, *определяемое полем окружностей [* P_i *] задаваемых полем квазитензора* x_i^0.

Система функций $a_{ik}^0 \overset{\text{def}}{=} \tilde{x}_{ik}^0 - x_i^0 x_k^0 + \frac{1}{2} g_{ik} g^{jl} x_j^0 x_l^0$, где $\tilde{x}_{ij}^0 = x_{ij}^0 + \frac{1}{2} g^{nn} (x_n^0)^2 g_{ij} - x_n^0 \Lambda_{ij}^n$, образует тензор (вообще говоря, несимметричный). Следуя работе [7], тензор a_{ik}^0 назовем основным тензором нормализации пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ полем квазитензора x_i^0. В случае симметрии основного тензора a_{ik}^0 нормализацию пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ назовем гармонической [5].

5. Совокупность функций $A_{ijk}^0 \overset{\text{def}}{=} a_{ijk}^0 - a_{ik}^0 x_j^0 - a_{kj}^0 x_i^0 + (g_{ik} a_{lj}^0 + g_{jk} a_{il}^0) g^{lt} x_t^0 - 2 a_{ij}^0 x_k^0$ образует тензор.

Предположим, что основной тензор нормализации a_{ik}^0 невырожден: $a \overset{\text{def}}{=} |a_{ik}^0| \neq 0$, $a_{ik}^0 a_0^{kj} = a_{ki}^0 a_0^{jk} = \delta_i^j$. В этом случае будем говорить, что нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ являются невырожденными.

Потребуем, чтобы система форм $\overline{\Omega}_b^a = \overset{0}{\Omega}{}_b^a + \Pi_{bk}^a \overset{0}{\Omega}{}_0^k$ удовлетворяла структурным уравнениям пространства конформной связности $\overline{C}_{n-1,n-1}$. Тогда система функций Π^a_{bk} есть тензор. В качестве тензора Π^j_{ik} можно взять охват $A^j_{ik} \overset{def}{=} a^{jt}_0 \overset{0}{A}_{tik} - g^{jt} g_{si} a^{sl}_0 \overset{0}{A}_{ltk}$. При этом соответствующие формы $\overline{\Omega}^a_b$ связности обозначим через $\overset{1}{\Omega}{}^a_b$, а само пространство конформной связности — через $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если полное оснащение гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$ *является невырожденным, то индуцируется второе пространство конформной связности* $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ *(с кривизной и кручением), метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором* g_{ij} *пространства* $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$.

6. Справедлива

Теорема 4. *Невырожденное полное оснащение гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$ *определяет одновременную нормализацию пространств конформной связности* $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ *и* $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ *полем квазитензора* x^0_i, *при этом поля основных тензоров* a^0_{ik} *и* $\overset{1}{a}{}^0_{ik}$ *этих пространств совпадают; аффинные связности* $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ *и* $\overset{1}{\overline{\nabla}}$, *индуцируемые при этом оснащении и определяемые системами форм соответственно* $\{\overset{0}{\overline{\theta}}{}^j_0, \overset{0}{\overline{\theta}}{}^j_i\}$, $\{\overset{1}{\overline{\theta}}{}^j_0, \overset{1}{\overline{\theta}}{}^j_i\}$ *[7], являются вейлевыми с полем метрического тензора* g_{ik}, *причем связность* $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ *— без кручения, тензор кручения связности* $\overset{1}{\overline{\nabla}}$ *совпадает с тензором кру-*

чения пространства $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ *и, вообще говоря, является ненулевым. Связность* $\overset{0}{\nabla}$ *риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства* $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ *является гармонической (* $a^{0}_{[lt]} = 0$).

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // Матем. сб. М., 1952. Т. 31. №1. С. 43—75.
2. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань: 1972. 178 с.
3. *Евтушик Л.Е. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итогт науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ. Т. 9 М., 1979.
4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. общества. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.
5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М. 1976.
6. *Столяров А.В.* Линейные связности на распределениях конформного пространства // Изв. вузов. Математика. Казань, 2001. №3. С. 60—72.
7. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства // Изв. вузов. Математика. Казань, 2002. № 11. С. 61—70.

T. Andreeva

THE LINEAR CONNECTIONS ON THE FULL
EQUIPPED HYPERSURFACE IN A CONFORMAL SPACE

In the work the linear connections on full equipped hypersurface in conformal space are investigated.