

Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин

**ДИНАМИКА ДИСПЕРСНОЙ ЧАСТИЦЫ,
СДУВАЕМОЙ С ПЛОСКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ЛАМИНАРНЫМ СЛОЕМ КУЭТТА**

Определен характер влияния силы Саффмэна на выход частицы из слоя. Продольная скорость частицы может оказаться больше скорости жидкости, тогда сила Саффмэна будет направлена к поверхности. В этих условиях нужна большая начальная вертикальная скорость, чтобы частица достигла внешней границы слоя.

Character of influence Saffmena force on the particles out of the layer is detected. The longitudinal velocity of the particle can be more fluid speed, then the power Saffmena will be directed to the surface. In these circumstances we need a big initial vertical velocity of the particle to reach the outer layer of the border.

Ключевые слова: дисперсные частицы, динамика, линейный профиль скорости.

Key words: dispersed particles, dynamics, linear velocity profile.

В расчетах дисперсных течений в водотоках, в системах гидро- и пневмотранспорта при математическом моделировании образования ветропесчаных потоков необходимо исследовать движение частиц вблизи твердой поверхности [1–3]. Однако при этом нередко без всякого обоснования не учитываются подъемные силы.

При движении дисперсной частицы в сдвиговом потоке возникает поперечная сила, обусловленная разностью давлений в направлении градиента скорости (чем меньше скорость, тем больше давление) [4; 5]. В классической работе Саффмэна [6] для случая линейного профиля скорости несущей среды и сферической частицы получена формула

$$F_{Saf} = C_{Saf} \frac{\delta^2}{8} \rho_f (U_f - U_p) \left(v \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right)^{1/2},$$

где ρ_f – плотность жидкости; δ – диаметр частицы; U_f , U_p – продольная скорость жидкости и частицы соответственно; Y – поперечная координата; v – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Причем коэффициент $C_{Saf} = 6,46$. Анализ Саффмэна был ограничен условиями малости чисел Рейнольдса [7]

$$Re = \left| \vec{V}_R \right| \delta / v \ll 1, \quad Re_\omega = \left| \vec{\Omega}_R \right| \delta^2 v \ll 1,$$



$$\text{Re}_A = \frac{\delta^2}{\nu} \left| \frac{\partial U_g}{\partial Y} \right| \ll 1, \quad A = \frac{\text{Re}_p}{\text{Re}_A^{1/2}} = \frac{|U_R|}{\sqrt{\nu \left| \frac{\partial U_g}{\partial Y} \right|}} \ll 1,$$

где $|\vec{V}_R|$, $|\vec{\Omega}_R|$ – модуль относительной линейной и угловой скорости частицы соответственно.

Рассмотрим поступательное движение сферической частицы, сдуваемой с плоской горизонтальной поверхности ламинарным слоем Куэтта. Ось Ox направим по поверхности вдоль течения, а ось Oz – вертикально вверх. Кроме сил тяжести, Архимеда, гидродинамического сопротивления, эффекта присоединенных масс, необходимо учесть силу Саффмэна. Для малых чисел Рейнольдса проекции уравнения движения на продольную и поперечную (вертикальную) оси имеют следующий вид [4; 8]:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{dU_p}{dT} = \beta(U_f - U_p), \quad \beta = \frac{18\lambda\nu}{\delta^2}, \quad \lambda = \frac{\rho_f}{\rho_p}, \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{dW_p}{dT} = -\beta W_p - g + a(U_f - U_p) \left(\frac{\partial U_f}{\partial Y}\right)^{1/2}, \quad a = \frac{3,08\lambda\sqrt{\nu}}{\delta}. \quad (2)$$

Учтем, что в слое Куэтта продольная скорость жидкость растет линейно с расстоянием от стенки $U_f = Z/L$. Перейдем в (1)–(2) к безразмерным переменным, выбрав в качестве характерных параметров U_∞ – скорость жидкости на внешней границе слоя и L – его толщину:

$$\frac{du}{dt} = \frac{z-u}{Stk_M}, \quad (3)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-w}{Stk_M} - \xi + \alpha(z-u), \quad (4)$$

$$Stk_M = \frac{U_\infty}{\beta L} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{R}{18\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right), \quad R = \frac{\text{Re}_\delta}{\Lambda}, \quad \text{Re}_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu}, \quad \Lambda = \frac{L}{\delta},$$

$$\alpha = 3,08 \frac{\sqrt{R}}{1 + \lambda/2}, \quad \xi = \frac{R}{18\lambda Fr} \cdot \frac{1-\lambda}{1 + \lambda/2}, \quad Fr = \frac{U_\infty^2}{gL},$$

$$u = \frac{U_p}{U_\infty}, \quad w = \frac{W_p}{U_\infty}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad t = \frac{U_\infty T}{L}.$$

Начальные условия:

$$x(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = u_0, \quad \dot{z}(0) = w_0 > 0. \quad (5)$$

Задача Коши (3), (4), (5) имеет аналитическое решение, впервые полученное в [8] для определения условий осаждения частицы в пристеночном слое. Применим метод [8] для решения задачи динамики частицы, сдуваемой с плоской горизонтальной поверхности.



Выразим из уравнения (3) вертикальную координату частицы и ее производные:

$$\begin{aligned}z &= \dot{u} \cdot Stk_M + u, \\w &= \dot{z} = \ddot{u} \cdot Stk_M + \dot{u}, \\ \dot{w} &= \ddot{u} \cdot Stk_M + \dot{u}.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение (4):

$$\ddot{u} \cdot Stk_M + \dot{u} = -(\ddot{u} \cdot Stk_M + \dot{u}) / Stk_M - \xi + \alpha(\dot{u} \cdot Stk_M + u - u).$$

После преобразования отсюда получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

92

$$\ddot{u} + \frac{2}{Stk_M} \dot{u} + \left(\frac{1}{Stk_M^2} - \alpha \right) u = \frac{\xi}{Stk_M}. \quad (6)$$

Начальные условия с учетом (3):

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = -u_0 / Stk_M, \quad \ddot{u}(0) = (w_0 + u_0 / Stk_M) / Stk_M. \quad (7)$$

Стандартная процедура решения задачи Коши (6)–(7) после подстановки в (4) дает при $u_0 \geq 0$, $w_0 > 0$ и $\alpha \neq 1 / Stk_M^2$:

$$w(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) - B, \quad B = \frac{\xi \cdot Stk_M}{1 - \alpha \cdot Stk_M^2}, \quad (8)$$

$$z(t) = \frac{c_1}{\lambda_1} (\exp(\lambda_1 t) - 1) + \frac{c_2}{\lambda_2} (\exp(\lambda_2 t) - 1) - Bt, \quad (9)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(w_0 + u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{1 / Stk_M + \sqrt{\alpha}} \right), \quad (10)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(w_0 - u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{1 / Stk_M - \sqrt{\alpha}} \right),$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{Stk_M} - \sqrt{\alpha}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{Stk_M} + \sqrt{\alpha}. \quad (11)$$

Исследуем, при каких условиях частица достигнет внешней границы слоя. Заметим, что $dw(0)/dt = -w_0 / Stk_M - \alpha u_0 < 0$, т. е. в начале движения $w(t)$ — убывающая функция. Рассмотрим сначала случай, когда функция $w(t)$ имеет минимум. Из условия $dw/dt = 0$ следует

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = 0,$$

так что функция $w(t)$ достигает минимума в момент времени

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \ln \left(-\frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_2} \right). \quad (12)$$



Согласно (10), (11) $\lambda_1 < 0$, $c_1 > 0$, тогда $t_1 > 0$ при

$$-\lambda_1 c_1 > \lambda_2 c_2 > 0.$$

Последнее условие эквивалентно системе неравенств

$$\left(\frac{1}{Stk_M} + \sqrt{\alpha} \right) \left(w_0 + u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{\frac{1}{Stk_M} + \sqrt{\alpha}} \right) > \left(\frac{-1}{Stk_M} + \sqrt{\alpha} \right) \left(w_0 - u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{\frac{1}{Stk_M} - \sqrt{\alpha}} \right),$$

$$\left(\frac{-1}{Stk_M} + \sqrt{\alpha} \right) \left(w_0 - u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{\frac{1}{Stk_M} - \sqrt{\alpha}} \right) > 0. \quad (13)$$

Из (13) последнего неравенства следует $w_0 > -(\alpha u_0 + \xi) Stk_M$, что выполняется автоматически при $u_0 \geq 0$. Условие (13) может быть удовлетворено двумя способами:

$$\alpha < \frac{1}{Stk_M}, \quad w_0 < u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{\sqrt{\alpha} - 1/Stk_M}, \quad (14)$$

$$\alpha > \frac{1}{Stk_M}, \quad w_0 > u_0 \sqrt{\alpha} + \frac{\xi}{\sqrt{\alpha} - 1/Stk_M}. \quad (15)$$

Наиболее интересный для практики случай, когда либо $u_0 = 0$, либо u_0 — малая положительная величина. Тогда из (14) $w_0 < 0$, но это значит, что частица не покинет поверхность. Поэтому условия (14) далее не рассматриваются. Подстановка условий (15) в (8) с учетом (12) показывает, что в этом случае $w(t_1) > 0$. Следовательно, при выполнении (15) частица обязательно покинет слой через верхнюю границу.

Однако найденные условия (15) являются достаточными для ухода частицы из слоя, но не необходимыми. Действительно, частица может покинуть слой через верхнюю границу при монотонно убывающей $w(t)$, но достаточно большой начальной скорости w_0 . Примером служат линии 3 на рисунках 5–6 и на рисунках 9–10. Найдем момент времени t_2 , в который $w(t) = 0$ (после чего частица начинает двигаться вниз):

$$c_1 \exp(\lambda_1 t_2) + c_2 \exp(\lambda_2 t_2) = B. \quad (16)$$

Из (16) численным методом определяется t_2 . Далее необходимо найти условия, при которых $z(t_2) \geq 1$, для чего должно быть численно решено уравнение

$$[\exp(\lambda_1 t_2) - 1]c_1/\lambda_1 + [\exp(\lambda_2 t_2) - 1]c_2/\lambda_1 - B t_2 = 1. \quad (17)$$

Поиск условий выхода частицы из слоя через верхнюю границу путем решения (16)–(17) является весьма трудоемкой задачей. Целесообразно ее решать построением зависимостей (8), (9) в среде Mathcad при различных значениях критериев подобия, что показано на рисунках 1–10.

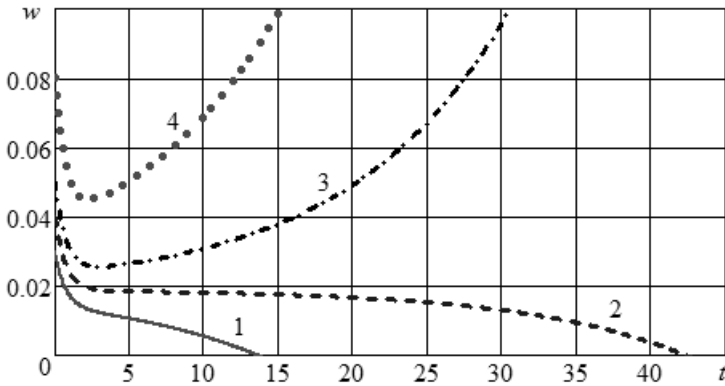


Рис. 1. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по времени при $R = 0,033$, $\lambda = 0,0012$, $Fr = 400$, $u_0 = 0$ и различных значениях w_0 :
1 – $w_0 = 0,03$, 2 – $w_0 = 0,04$, 3 – $w_0 = 0,05$, 4 – $w_0 = 0,08$

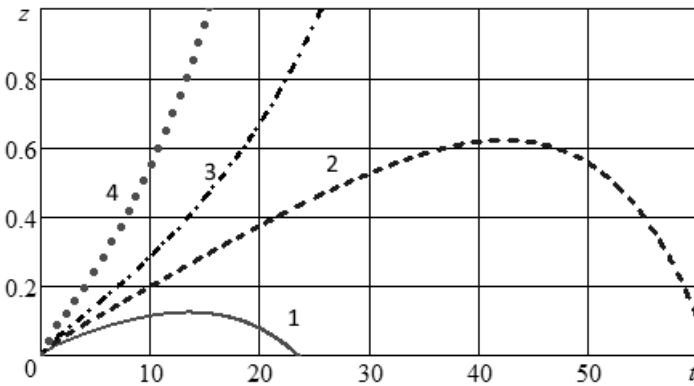


Рис. 2. Изменение безразмерной вертикальной координаты частиц по времени при $R = 0,033$, $\lambda = 0,0012$, $Fr = 400$, $u_0 = 0$ и различных значениях w_0 :
1 – $w_0 = 0,03$, 2 – $w_0 = 0,04$, 3 – $w_0 = 0,05$, 4 – $w_0 = 0,08$

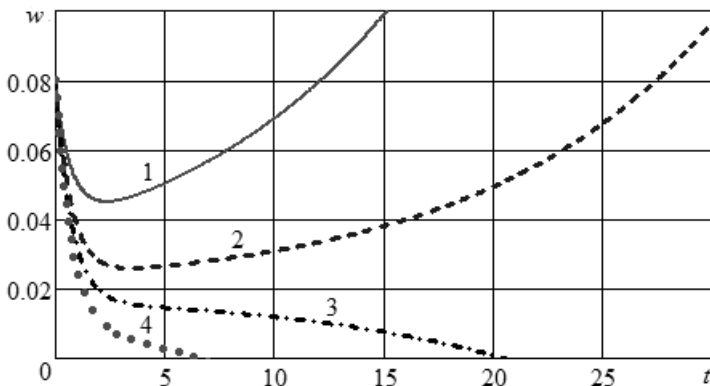


Рис. 3. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по времени при $R = 0,033$, $\lambda = 0,0012$, $Fr = 400$, $w_0 = 0,08$ и различных значениях u_0 :
1 – $u_0 = 0$, 2 – $u_0 = 0,04$, 3 – $u_0 = 0,06$, 4 – $u_0 = 0,08$

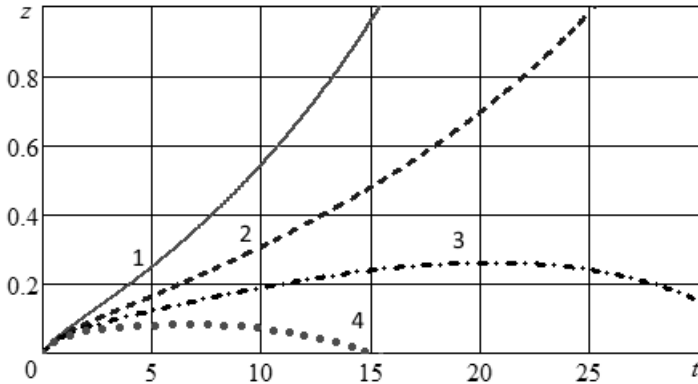


Рис. 4. Изменение безразмерной вертикальной координаты частиц по времени при $R = 0,033$, $\lambda = 0,0012$, $Fr = 400$, $w_0 = 0,08$ и различных значениях u_0 :
 1 – $u_0 = 0$, 2 – $u_0 = 0,04$, 3 – $u_0 = 0,06$, 4 – $u_0 = 0,08$

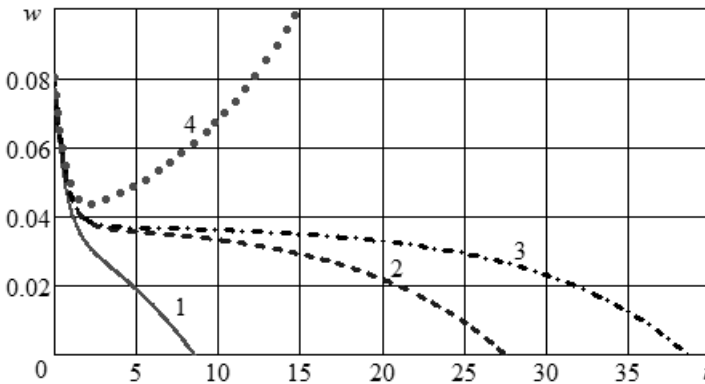


Рис. 5. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по времени при $R = 0,05$, $\lambda = 0,002$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных числах Фруда:
 1 – $Fr = 100$, 2 – $Fr = 150$, 3 – $Fr = 155$, 4 – $Fr = 250$

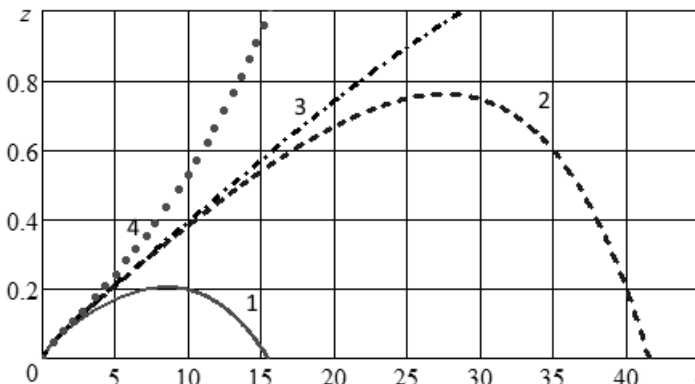


Рис. 6. Изменение безразмерной вертикальной координаты частиц по времени при $R = 0,05$, $\lambda = 0,002$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных числах Фруда:
 1 – $Fr = 100$, 2 – $Fr = 150$, 3 – $Fr = 155$, 4 – $Fr = 250$

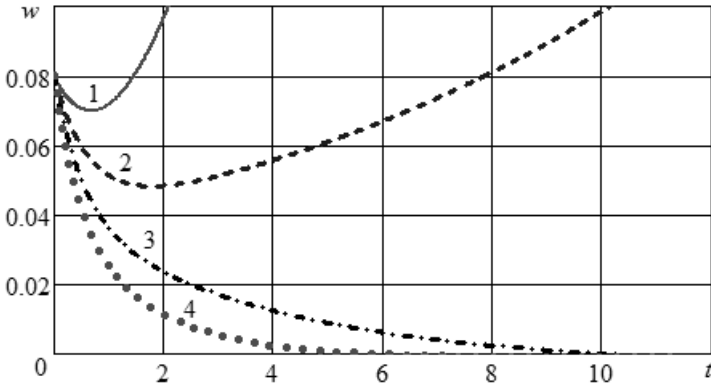


Рис. 7. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по времени при $R = 0,05$, $Fr = 600$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных отношениях плотностей: 1 – $\lambda = 0,001$, 2 – $\lambda = 0,002$, 3 – $\lambda = 0,003$, 4 – $\lambda = 0,004$

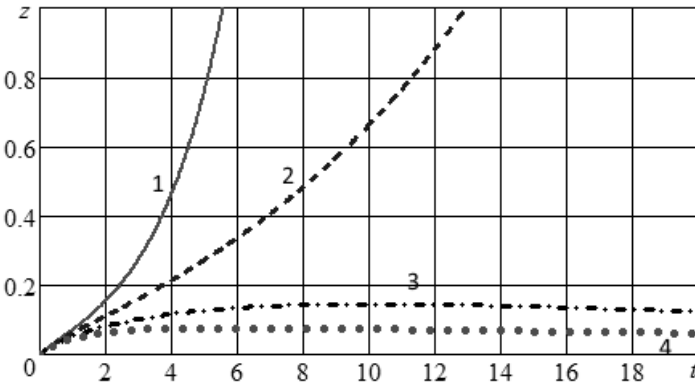


Рис. 8. Изменение безразмерной вертикальной координаты частиц по времени при $R = 0,05$, $Fr = 600$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных отношениях плотностей: 1 – $\lambda = 0,001$, 2 – $\lambda = 0,002$, 3 – $\lambda = 0,003$, 4 – $\lambda = 0,004$

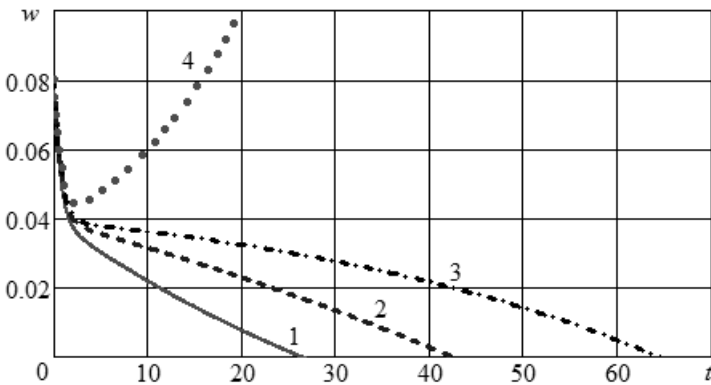


Рис. 9. Изменение безразмерной вертикальной скорости частиц по времени при $\lambda = 0,0012$, $Fr = 600$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных значениях R : 1 – $R = 0,029$, 2 – $R = 0,03$, 3 – $R = 0,0304$, 4 – $R = 0,032$

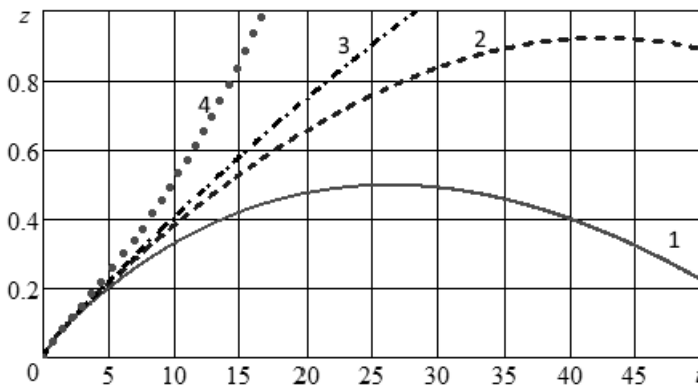


Рис. 10. Изменение безразмерной вертикальной координаты частиц по времени при $\lambda = 0,0012$, $Fr = 600$, $w_0 = 0,08$, $u_0 = 0$ и различных значениях R :

1 – $R = 0,029$, 2 – $R = 0,03$, 3 – $R = 0,0304$, 4 – $R = 0,032$

Таким образом, можно считать установленным характер влияния силы Саффмэна на выход частицы из слоя. Параметр α характеризует отношение силы Саффмэна к силе гидродинамического сопротивления. При $u_0 = 0$ чем больше α , тем меньше должна быть начальная скорость частицы для ее выхода из слоя. При $u_0 > 0$ зависимость «выходной» скорости от α более сложная: функция имеет минимум, после которой указанная зависимость становится возрастающей. Действительно, продольная скорость частицы u может оказаться больше скорости жидкости, тогда сила Саффмэна будет направлена к поверхности. В этих условиях нужна большая начальная вертикальная скорость, чтобы частица достигла внешней границы слоя.

Полученные результаты могут служить основой для совершенствования расчетных схем гидросистем [1; 2; 9].

Список литературы

1. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Космодамианский А.С. Моделирование осаждения твёрдых частиц в пульпопроводе // Наука и техника транспорта. 2011. № 2. С. 69–78.
2. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Примак Л.В. Осаждение частиц взвесей в воде // Механизация строительства. 2013. № 7. С. 44–48.
3. Великанов Н.Л., Наумов В.А. Взвешенные частицы в водотоке и их осаждение // Вода: химия, экология. 2014. № 2. С. 114–119.
4. Naumov V.A. Influence of Saffman's lift force on the motion of a particle in a Couette layer // J. of Engineering Physics and Thermophysics. 1995. Vol. 68, № 5. P. 840–844.
5. Наумов В.А. Динамика дисперсной частицы в вязкой среде // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 27–36.
6. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // Journal Fluid Mechanics. 1965. Vol. 22. P. 385–400.
7. Асмолов Е.С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // Известия АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 91–96.



8. Брич М.А. Выпадение капель из дисперсного потока на нагретую поверхность // Тепло- и массоперенос: итоги и перспективы. Минск, 1985. С. 50–55.

9. Великанов Н.Л., Корягин С.И. Проблемы эксплуатации и ремонта металлических и железобетонных конструкций. Калининград, 2015.

Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет.

E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

About authors

Prof. Nikolay Velikanov — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov — Kaliningrad State Technical University.

E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: SKoryagin@kantiana.ru