УДК 514.75

Е. П. Юрова

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Конгруэнции эллипсоидов в трехмерном аффинном пространстве со специальными свойствами конгруэнций ассоциированных эллипсов и цилиндров

В трехмерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции эллипсоидов со специальными свойствами ассоциированных эллипсов и цилиндров. Доказаны теоремы существования рассмотренных классов конгруэнций; дана их геометрическая характеристика.

Ключевые слова: аффинное пространство, конгруэнция, система уравнений Пфаффа, фокальное многообразие.

1. Теорема существования

Отнесем конгруэнцию V эллипсоидов к каноническому реперу $\left\{A;\vec{e}_\alpha\right\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$, где A — центр эллипсоида $Q\in V$, вектор $\vec{e}_3$ направлен по прямой, сопряженной касательной плоскости δ к поверхности центров S = (A) в точке A, а векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ — по касательным к линиям, высекаемым на поверхности S торсами прямолинейной конгруэнции $(A\vec{e}_3)$, причем концы A_α векторов $\vec{e}_\alpha$ лежат на эллипсоиде Q.

Такой канонический репер можно построить, если исключить из рассмотрения случай вырождения поверхности S в линию и случай, когда ассоциированная прямолинейная конгруэнция — параболическая, что мы в дальнейшем и будем предполагать.

В репере $\{A, \vec{e}_\alpha\}$ уравнение эллипсоида Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишутся, соответственно, в виде

$$F(x) \overset{def}{=} (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 2lx^1x^2 - 1 = 0\,; \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} \omega^3 = 0, \omega_3^1 = a_1\omega^1,\ \omega_3^2 = a_2\omega^2, \\ \omega_1^3 = b_1\omega^1 + b\omega^2,\ \omega_2^3 = b\omega^1 + b_2\omega^2, \\ \omega_1^2 = m_{11}\omega^1 + m_{12}\omega^2,\ \omega_2^1 = m_{21}\omega^1 + m_{22}\omega^2, \\ d\lambda = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2,\ \omega_1^1 = c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2, \\ \omega_2^2 = c_{21}\omega^1 + c_{22}\omega^2, \omega_3^3 = c_{31}\omega^1 + c_{32}\omega^2, \end{cases} \qquad (1.2)$$

причем [1, с. 162]

$$a_1 - a_2 \neq 0\,. \qquad (1.3)$$

Чистое замыкание системы (1.2) имеет вид

$$\begin{cases} \Delta a_1 \wedge \omega^1 = 0,\ \Delta a_2 \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta b_1 \wedge \omega^1 + \Delta b \wedge \omega^2 = 0,\ \Delta b \wedge \omega^1 + \Delta b_2 \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta m_1 \wedge \omega^1 + \Delta m_{12} \wedge \omega^2 = 0,\ \Delta m_{21} \wedge \omega^1 + \Delta m_{22} \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta\lambda_1 \wedge \omega^1 + \Delta\lambda_2 \wedge \omega^2 = 0, \Delta c_{11} \wedge \omega^1 + \Delta c_{12} \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta c_{21} \wedge \omega^1 + \Delta c_{22} \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta c_{31} \wedge \omega^1 + \Delta c_{31} \wedge \omega^1 + \Delta c_{32} \wedge \omega^2 = 0, \end{cases} \qquad (1.4)$$

где

$$\Delta a_1 = da_1 - a_1\omega_3^3 + m_{21}(a_1 - a_2)\omega^2\,,$$

$$\Delta a_2 = da_2 - a_2\omega_3^3 + m_{12}(a_2 - a_1)\omega^1\,,$$

$$\Delta b_1 = db_1 + b_1(m_{21}\omega^2 - 2\omega_1^1 + \omega_3^3) - m_{12}b\omega^2\,,$$

$$\Delta b = db + b(2m_{21}\omega^2 - \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)\,,$$

$$\Delta b_2 = db_2 + b_2(m_{12}\omega^1 - 2\omega_2^2 + \omega_3^3) + b_1m_{21}\omega^1\,,$$

$$\Delta m_{11} = dm_{11} + m_{11}(m_{21}\omega^2 - 2\omega_1^1 + \omega_2^2) + b_1a_2\omega^2\,,$$

$$\Delta m_{12} = dm_{12} + m_{12}(m_{12}\omega^1 - \omega_1^1),$$
$$\Delta m_{21} = dm_{21} + m_{21}(m_{21}\omega^2 - \omega_2^2) + b_2 a_1 \omega^2, \qquad (1.5)$$
$$\Delta m_{22} = dm_{22} + m_{22}(m_{12}\omega^1 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2),$$
$$\Delta\lambda_1 = d\lambda_1 + \lambda_1(m_{21}\omega^2 - \omega_1^1),$$
$$\Delta\lambda_2 = d\lambda_2 + \lambda_2(m_{12}\omega^1 - \omega_2^2),$$
$$\Delta c_{11} = dc_{11} + c_{11}(m_{21}\omega^2 - \omega_1^1) + (a_1 b - m_{12}m_{21})\omega^2,$$
$$\Delta c_{12} = dc_{12} + c_{12}(m_{12}\omega^1 - \omega_2^2) - m_{11}m_{22}\omega^1,$$
$$\Delta c_{21} = dc_{21} + c_{21}(m_{21}\omega^2 - \omega_1^1) - m_{22}m_{11}\omega^2,$$
$$\Delta c_{22} = dc_{22} + c_{22}(m_{12}\omega^1 - \omega_2^2) - m_{21}m_{12}\omega^1 - ba_2\omega^1,$$
$$\Delta c_{31} = dc_{31} + c_{31}(m_{21}\omega^2 - \omega_1^1) + ba_1\omega^2,$$
$$\Delta c_{32} = dc_{32} + c_{32}(m_{12}\omega^1 - \omega_2^2) + ba_2\omega^1.$$

Имеем $S_1 = 10;\ q = 17;\ S_2 = 7;\ Q = 24;$ N = 24 = Q.

Система в инволюции и определяет конгруэнцию V с произволом семи функций двух аргументов.

2. Конгруэнции ассоциированных эллипсов и цилиндров

Используя условие стационарности точки $M(x^\alpha)$

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha, \qquad (2.1)$$

находим

$$-\frac{1}{2}dF = (\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2)(x^1)^2 + (\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1)(x^2)^2 + \omega_3^3(x^3)^2 +$$
$$+(\omega_1^2 + \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2) - d\lambda)x^1x^2 + (\omega_3^1 + \omega_1^3 + \qquad (2.2)$$
$$+\lambda\omega_3^2)x^1x^3 + (\omega_3^2 + \omega_2^3 + \lambda\omega_3^1)x^2x^3 + (\omega^1 + \lambda\omega^2)x^1 +$$
$$+(\omega^2 + \lambda\omega^1)x^2.$$

Из выражения (2.2) следует, что точка $A_1(1,0,0)$ — фокальная точка эллипсоида $Q \in V$, если

$$\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2 + \omega^1 + \lambda\omega^2 = 0, \tag{2.3}$$

точка $A_2(0,1,0)$ — фокальная, если

$$\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1 + \omega^2 + \lambda\omega^1 = 0, \tag{2.4}$$

точка $A_3(0,0,1)$ — фокальная, если

$$\omega_3^3 = 0. \tag{2.5}$$

Из выражения (2.5), следует, что если точка A_3 — фокальная, то и точка $A_3^*(0,0,-1)$ фокальная [1, теорема 1].

Однако не существует конгруэнции эллипсоидов с двумя фокальными точками $A_1(1,0,0)$ и $A_1^*(-1,0,0)$ и с двумя фокальными точками $A_2(0,1,0)$ и $A_2^*(0,-1,0)$.

Действительно, если A_1 и A_1^* или A_2 и A_2^* — фокальные, то

$$\begin{cases} \omega_1^1 + \lambda\omega_1^2 + \omega^1 + \lambda\omega^2 = 0, \\ \omega_1^1 + \lambda\omega_1^2 - \omega^1 - \lambda\omega^2 = 0 \end{cases} \quad \to \quad \omega^1 + \lambda\omega^2 = 0 \text{ — противоречие,}$$

$$\begin{cases} \omega_2^2 + \lambda\omega_2^1 + \omega^2 + \lambda\omega^1 = 0, \\ \omega_2^2 + \lambda\omega_2^1 - \omega^2 - \lambda\omega^1 = 0 \end{cases} \quad \to \quad \omega^2 + \lambda\omega^1 = 0 \text{ — противоречие,}$$

так как

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0. \tag{2.6}$$

Каждый эллипсоид $Q \in V$ определяет единственный эллипс $C = Q \bigcap \sigma$

$$f = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2\lambda x^1 x^2 - 1 = 0, x^3 = 0 \tag{2.7}$$

и единственный цилиндр $Z \supset C$ с

$$f = 0. \tag{2.8}$$

Имеем

$$-\frac{1}{2}df = (\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2)(x^1)^2 + (\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1)(x^2)^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^1 +$$
$$+\lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2) - d\lambda)x^1x^2 + (\omega^1 + \lambda\omega^2)x^1 + (\omega^2 + \lambda\omega^1)x^2 + \quad (2.9)$$
$$+x^3((\omega_3^1 + \lambda\omega_3^2)x^1 + (\omega_3^2 + \lambda\omega_3^1)x^2).$$

Теорема 2.1. *Если точка M — фокальная точка ассоциированного цилиндра Z, лежащая в касательной плоскости* σ*, то она является фокальной точкой эллипсоида* $Q \in V$ *, и наоборот.*

Доказательство. Сравнивая выражения (2.2) и (2.9), убеждаемся, что системы уравнений

$$F = 0,\ dF = 0,\ x^3 = 0, \qquad (2.10)$$

$$f = 0,\ df = 0,\ x^3 = 0, \qquad (2.11)$$

соответственно определяющие фокальные точки эллипсоида Q и цилиндра Z, лежащие в касательной плоскости σ (т. е. плоскости $x^3 = 0$), совпадают.

Учитывая в правой части формул (2.2) и (2.9) пфаффовы уравнения (1.2), приводим их (соответственно) к виду

$$-\frac{1}{2}dF = F_1\omega^1 + F_2\omega^2, \qquad (2.12)$$

$$-\frac{1}{2}df = f_1\omega^1 + f_2\omega^2, \qquad (2.13)$$

где

$$F_1 = (c_{11} + \lambda m_{11})(x^1)^2 + (c_{21} + \lambda m_{21})(x^2)^2 + (m_{11} + m_{21} +$$
$$+\lambda(c_{11} + c_{21}) - \lambda_1)x^1x^2 + x^3((a_1 + b_1)x^1 + (b + \lambda a_1)x^2) + \quad (2.14)$$
$$+x^1 + \lambda x^2,$$

$$F_2 = (c_{12} + \lambda m_{12})(x^1)^2 + (c_{22} + \lambda m_{22})(x^2)^2 + (m_{12} + m_{22} +$$
$$+\lambda(c_{12} + c_{22}) - \lambda_2)x^1x^2 + x^3((b + \lambda a_2)x^1 + (a_2 + b_2)x^2) +$$
$$+x^2 + \lambda x^1,$$

$$f_1=(c_{11}+\lambda m_{11})(x^1)^2+(c_{21}+\lambda m_{21})(x^2)^2+(m_{11}+m_{21}+ \\ +\lambda(c_{11}+c_{21})-\lambda_1)x^1x^2+x^1+\lambda x^2+a_1x^1x^3+\lambda a_1x^2x^3, \tag{2.15}$$

$$f_2=(c_{12}+\lambda m_{12})(x^1)^2+(c_{22}+\lambda m_{22})(x^2)^2+(m_{12}+m_{22}+ \\ +\lambda(c_{12}+c_{22})-\lambda_2)x^1x^2+\lambda x^1+x^2+a_2x^2x^3+\lambda a_2x^1x^3.$$

Так как

$$-dx^3=(b_1x^1+bx^2+c_{31}x^3)\omega^1+(bx^1+b_2x^2+c_{32}x^3)\omega^2, \tag{2.16}$$

то фокальные точки эллипса $C\in(c)$ определяются системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}(x^1)^2+(x^2)^2+2\lambda x^1x^2-1=0,\ x^3=0,\\ f_1(bx^1+b_2x^2)-f_2(b_1x^1+bx^2)=0.\end{cases} \tag{2.17}$$

В подробной записи последнее уравнение этой системы воспроизводится в виде

$$(bc_{11}-b_1c_{12}+\lambda(bm_{11}-b_1m_{12}))(x^1)^3+(b_2c_{21}-bc_{22}+ \\ +\lambda(b_2m_{21}-bm_{22}))(x^2)^3+x^1x^2((m_{11}+m_{21}+\lambda(c_{11}+c_{21})- \\ -\lambda_1)(bx_1+b_2x_2)-(m_{12}+m_{22}+\lambda(c_{12}+c_{22})-\lambda_2)(b_1x_1+ \\ +bx_2)+(b_2(c_{11}+\lambda m_{11})-b(c_{12}+\lambda m_{12}))x^1+(b(c_{21}+ \\ +\lambda m_{21})-b_1(c_{22}+\lambda m_{22}))x^2+b_2-b_1)+(b-\lambda b_1)(x^1)^2+ \\ +(\lambda b_2-b)(x^2)^2=0. \tag{2.18}$$

Из уравнения (2.18) следует, что точки $A_1(1,0,0)$ и $A_1^*(-1,0,0)$ являются фокальными точками эллипса $C\in(C)$, если

$$bc_{11}-b_1c_{12}+\lambda(bm_{11}-b_1m_{12})=0,\ b-\lambda b_1=0. \tag{2.19}$$

Точки $A_2(0,1,0)$ и $A_2^*(0,-1,0)$ будут фокальными точками эллипса $C\in(C)$, если

$$b_2c_{21}-bc_{22}+\lambda(b_2m_{21}-bm_{22})=0,\ \lambda b_2-b=0. \tag{2.20}$$

3. Конгруэнции V_1

Определение 3.1. *Конгруэнцией V_1 называется конгруэнция V, характеризуемая сопряженностью относительно эллипсоида $Q \in V$ векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.*

Конгруэнция V_1 характеризуется условием

$$\lambda = 0 . \tag{3.1}$$

Из (1.2), (1.3), (3.1) следует, что конгруэнции V_1 существуют и определяются с произволом шести произвольных функций двух аргументов. Формулы (2.14), (2.15) и (2.18) в силу (3.1) принимают соответственно вид

$$\begin{gathered} F_1 = c_{11}(x^1)^2 + c_{21}(x^2)^2 + (m_{11} + m_{21})x^1x^2 + (a_1 + b_1)x^1x^3 + \\ + bx^2x^3 + x^1, \\ F_2 = c_{12}(x^1)^2 + c_{22}(x^2)^2 + (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + bx^1x^3 + \\ + (a_2 + b_2)x^2x^3 + x^2; \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$f_1 = c_{11}(x^1)^2 + c_{21}(x^2)^2 + (m_{11} + m_{21})x^1x^2 + x^1 + a_1x^1x^3, \tag{3.3}$$
$$f_2 = c_{12}(x^1)^2 + c_{22}(x^2)^2 + (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + x^2 + a_2x^2x^3;$$

$$\begin{gathered} (bc_{11} - b_1c_{12})(x^1)^3 + (b_2c_{21} - bc_{22})(x^2)^3 + x^1x^2((m_{11} + \\ + m_{21})(bx_1 + b_2x_2) - (m_{12} + m_{22})(b_1x_1 + bx_2) + (b_2c_{11} - \\ - bc_{12})x^1 + (bc_{21} - b_1c_{22})x^2 + b_2 - b_1) + b((x^1)^2 - (x^2)^2) = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

4. Конгруэнции V_1^*

Определение 4.1. *Конгруэнцией V_1^* называется конгруэнция V_1, ассоциированная конгруэнция эллипсов которой имеет фокальными поверхностями поверхности $(A_1), (A_1^*), (A_2), (A_2^*)$.*

Подставляя в уравнения (3.4) координаты точек $A_1(1,0,0),\ A_1^*(-1,0,0),\ A_2(0,1,0),\ A_2^*(0,-1,0)$, получим

$$\begin{cases} bc_{11}-b_1c_{12}+b_2c_{11}-bc_{12}+b=0, \\ -(bc_{11}-b_1c_{12}+b_2c_{11}-bc_{12})+b=0, \\ b_2c_{21}-bc_{22}+bc_{21}-b_1c_{22}-b=0, \\ -(b_2c_{21}-bc_{22}+bc_{21}-b_1c_{22})-b=0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Система (4.1) эквивалентна системе

$$b_2c_{11}-b_1c_{12}=0, b_2c_{21}-b_1c_{22}=0, b=0. \tag{4.2}$$

Если

$$c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}\neq 0, \tag{4.3}$$

то

$$b_1=0,\ b_2=0 \tag{4.4}$$

Система пфаффовых уравнений

$$\omega_1^3=0,\ \omega_2^3=0 \tag{4.5}$$

вполне интегрируема. Учитывая условия (3.1), (4.5) в системе уравнений (1.2), убеждаемся, что подкласс $V_{1,0}^*$ конгруэнций V_1^*, характеризуемый уравнениями (4.5), определяется с произволом пяти произвольных функций двух аргументов. Действительно, система уравнений Пфаффа конгруэнций $V_{1,0}^*$ имеет вид

$$\begin{cases} \omega^3=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_3^1=a_1\omega^1,\ \omega_3^2=a_2\omega^2, \\ \omega_1^2=m_{11}\omega^1+m_{12}\omega^2,\ \omega_2^1=m_{21}\omega^1+m_{22}\omega^2, \\ \omega_1^1=c_{11}\omega^1+c_{12}\omega^2,\ \omega_2^2=c_{21}\omega^1+c_{22}\omega^2, \\ \omega_3^3=c_{31}\omega^1+c_{32}\omega^2 \quad . \end{cases} \tag{4.6}$$

Имеем

$$S_1=7;\ q=12;\ S_2=5;\ Q=17=N.$$

Система в инволюции и имеет решение с произволом пяти произвольных функций двух аргументов.

Если

$$c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}=0 \leftrightarrow \omega_1^1\wedge\omega_2^2=0\,, \tag{4.7}$$

то система уравнений (4.2) приводится к виду

$$b=0,\ b_2c_{11}-b_1c_{12}=0 \quad (\omega_1^1\neq 0) \tag{4.8}$$

или

$$b=0;\ b_2c_{21}-b_1c_{22}=0 \quad (\omega_1^1\neq 0;\ \omega_2^2\neq 0). \tag{4.9}$$

Если же $\omega_1^1\equiv 0$ и $\omega_2^2\equiv 0$, то, замыкая уравнения

$$\omega_1^1=0,\ \omega_2^2=0\,, \tag{4.10}$$

получим

$$\begin{cases}\omega_1^2\wedge\omega_2^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0\\ \omega_2^1\wedge\omega_1^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0\end{cases} \leftrightarrow \quad \omega_1^2\wedge\omega_2^1=0\,, \tag{4.11}$$

так как

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1=b_1\omega^1\wedge a_1\omega^1=0,\ \omega_2^3\wedge\omega_3^2=b_2\omega^2\wedge a^2\omega^2=0\,.$$

Учитывая (4.10), (4.11), (3.1) в пфаффовых уравнениях (1.2), получим

$$\begin{cases}\omega^3=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega_2^2=0,\ \omega_3^1=a_1\omega^1,\ \omega_3^2=a_2\omega^2,\\ \omega_1^3=b_1\omega^1+b\omega^2,\ \omega_2^3=b_2\omega_1^2+b\omega^1,\\ \omega_2^1=h\omega_1^2,\ \omega_1^2=m_{11}\omega^1+m_{12}\omega^2,\ \omega_3^3=c_{31}\omega^1+c_{32}\omega^2.\end{cases} \tag{4.13}$$

Имеем

$$S_1=7;\ q=10;\ S_2=3;\ Q=13=N.$$

Следовательно, система (4.13) — в инволюции и определяет подкласс конгруэнций V_1^* с произволом трех функций двух аргументов. Назовем конгруэнции этого подкласса конгруэнциями $V_{1,1}^*$.

Рассмотрим общий случай

$$b = 0,\ b_2 c_{11} - b_1 c_{12} = 0, \tag{4.14}$$

определяющий конгруэнции $V_{1,2}^* \subset V_1^*$.

Второе уравнение можно заменить (в силу неравенства $\omega_1^1 \neq 0$) уравнением Пфаффа

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = k\omega_1^1. \tag{4.15}$$

Действительно,

$$\omega_1^1 \wedge (\omega_1^3 + \omega_2^3) = (c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2) \wedge (b_1\omega^1 + b_2\omega^2) =$$
$$= (b_2 c_{11} - b_1 c_{12})\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Следовательно,

$$b_2 c_{11} - b_1 c_{12} = 0 \leftrightarrow \omega_1^1 \wedge (\omega_1^3 + \omega_2^3) = 0 \leftrightarrow \omega_1^3 + \omega_2^3 = k\omega_1^1.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнций $V_{1,2}^*$ запишется в виде

$$\begin{cases} \omega^3 = 0,\ \omega_3^1 = a_1\omega^1,\ \omega_3^2 = a_2\omega^2,\ \omega_1^3 = b_1\omega^1, \\ \omega_1^3 + \omega_2^3 = k\omega_1^1, \\ \omega_1^2 = m_{11}\omega^1 + m_{12}\omega^2,\ \omega_2^1 = m_{21}\omega^1 + m_{22}\omega^2, \\ \omega_1^1 = c_{11}\omega^1 + c_{12}\omega^2, \omega_2^2 = p\omega_1^1,\ \omega_3^3 = c_{31}\omega^1 + c_{32}\omega^2. \end{cases} \tag{4.16}$$

Имеем

$$S_1 = 9;\ q = 13;\ S_2 = 4;\ Q = N = 17.$$

Система в инволюции и определяет конгруэнции $V_{1,2}^*$ с произволом четырех произвольных функций двух аргументов.

Таким образом, конгруэнции V_1^* разбиваются на подклассы

$$V_{1,2}^*(\omega_1^1 \neq 0),\ V_{1,0}^*(\omega_1^1 \wedge \omega_2^2 \neq 0) \text{ и } V_{1,1}^*(\omega_1^1 \equiv 0, \omega_2^2 \equiv 0).$$

Теорема 4.1. *Поверхность S=(A) центров эллипсоидов* $Q \in V^*_{1,0}$ *является плоскостью. Конгруэнция ассоциированных эллипсов C является двупараметрическим семейством эллипсов, лежащих в этой плоскости.*

Доказательство. Из (4.6) следует

$$dx^3 = \omega_3^3 x^3, \tag{4.17}$$

т. е. плоскость $x^3 = 0$ стационарна и выступает поверхностью S=(A).

Для конгруэнций $V^*_{1,1}$, характеризуемых системой пфаффовых уравнений (4.13), формулы (3.2), (3.3), (3.4) запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} F_1 &= (m_{11} + m_{21})x^1x^2 + (a_1 + b_1)x^1x^3 + bx^2x^3 + x^1, \\ F_2 &= (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + (a_2 + b_2)x^2x^3 + bx^1x^3 + x^2; \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (m_{11} + m_{21})x^1x^2 + a_1x^1x^3 + x^1, \\ f_2 &= (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + a_2x^2x^3 + x^2; \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} x^1x^2((m_{11} + m_{21})(bx_1 + b_2x_2) - (m_{12} + m_{22})(b_1x_1 + bx_2) + \\ + b_2 - b_1) + b((x^1)^2 - (x^2)^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Для конгруэнций $V^*_{1,2}$, характеризуемых системой пфаффовых уравнений (4.16), эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 = c_{11}(x^1)^2 + pc_{11}(x^2)^2 + (m_{11} + m_{22})x^1x^2 + \\ + (a_1 + kc_{11})x^1x^3 + x^1, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} F_2 = c_{12}(x^1)^2 + pc_{12}(x^2)^2 + (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + \\ + (a_2 + kc_{12})x^2x^3 + x^2; \end{aligned}$$

$$f_1 = c_{11}(x^1)^2 + pc_{11}(x^2)^2 + (m_{11} + m_{21})x^1x^2 + a_1x^1x^3 + x^1, \tag{4.22}$$

$$f_2 = c_{12}(x^1)^2 + pc_{12}(x^2)^2 + (m_{12} + m_{22})x^1x^2 + a_2x^2x^3 + x^2;$$
$$-kc_{11}c_{12}(x^1)^3 + kc_{12}c_{21}(x^2)^3 + x^1x^2(kc_{12}(m_{11} + m_{21})x_2 -$$
$$-kc_{11}(m_{12} + m_{22})x_1) + kc_{12}c_{11}x^1 - kc_{11}c_{22} + k(c_{12} - c_{11})) = 0.$$

Список литературы

1. *Юрова Е.П.* Конгруэнции эллипсоидов с кратными фокальными поверхностями // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 162—169.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113—134.

E. Yurova

The conguences of ellipsoids in three-dimensional affine space with special properties congruences of associated ellipses and cylinders

In three-dimensional affine space congruances of ellipsoids with special properties of associated ellipses and cylinders are considered. For special classes of such congruences theorems of existence and geometrical properties are proved.