УДК 514.76

О. О. Белова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-4

Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

Комплекс $K_{(n-m)m}$ m-плоскостей в случае, когда его размерность превышает $n-m$, является подмногообразием многообразия Грассмана и по классификации Близникаса называется коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

В n-мерном проективном пространстве продолжается исследование коконгруэнции m-мерных плоскостей.

Ранее было показано, что расширенное композиционное оснащение данной коконгруэнции полями $(n-m-1)$-мерных плоскостей и точками C на m-мерных плоскостях позволяет задать связности трех типов в ассоциированном расслоении.

В данной работе изучены параллельные перенесения аналога плоскости Картана в связностях трех типов. Доказаны теоремы о видах пераллельных перенесений аналога плоскости Картана в связностях первого, второго и третьего типов.

Все исследования осуществляются с использованием метода Картана — Лаптева.

Ключевые слова: проективное пространство, коконгруэнция m-мерных плоскостей, связность, параллельное перенесение

Поступила в редакцию 05.10.2023 г.

Развитие понятия параллельного переноса началось с изучения Миндингом в 1837 г. обычного параллелизма на евклидовой плоскости. Это исследование послужило отправным пунктом для Леви-Чивиты при его исследовании параллельного переноса вектора на поверхности.

Дальнейшие обобщения понятия параллельного перенесения связаны с развитием общей теории связностей, которая занимает важное место в современной дифференциальной геометрии. А параллельные перенесения, являющиеся наиболее наглядной геометрической интерпретацией понятия связности [11; 15], широко применяются современными геометрами [9; 12; 13].

В работе изучаются параллельные перенесения оснащающей плоскости в связностях трех типов для коконгруэнции m-мерных плоскостей [2]. При этом исследования осуществляются с применением метода Картана — Лаптева [1; 8; 10; 14; 16; 17].

Рассмотрим проективное пространство P_n при использовании подвижного репера $\{A, A_i\}$ $(i, \ldots = 1, \ldots, n)$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, \quad dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A,$$

где формы Пфаффа $\omega^i, \omega_i,\ \omega_j^i$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i.$$

Будем исследовать комплекс $K_{(n-m)m}$ плоскостей размерности m $(1 \leq m < n)$, то есть коконгруэнцию m-мерных плоскостей [4; 5]. Комплекс $K_{(n-m)m}$ задается уравнениями (см.: [2; 3])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta,$$

где $a, \ldots = 1, \ldots, m;$ $\alpha, \ldots = m + 1, \ldots, n.$

Компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda^{\alpha a}_{\beta}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^{α}_{a}

$$\Delta\Lambda^{\alpha a}_{\beta} + \Lambda^{\alpha b}_{\gamma}\Lambda^{\gamma a}_{\beta}\omega_b - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^a \equiv 0,$$

причем дифференциальный тензорный оператор Δ действует по закону

$$\Delta\Lambda^{\alpha a}_{\beta} = d\Lambda^{\alpha a}_{\beta} + \Lambda^{\gamma a}_{\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} + \Lambda^{\alpha b}_{\beta}\omega^{a}_{b} - \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}.$$

В главном расслоении $G_s(K)$, где

$$s = n(n+1) - m(n-m-1),$$

задается связность способом Лаптева — Лумисте [2; 6; 7]:

$$\widetilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^{ac}_{b\alpha}\omega^{\alpha}_{c}, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma^{ab}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{b},$$

$$\widetilde{\omega}^a_{\alpha} = \omega^a_{\alpha} - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b}, \quad \widetilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},$$

$$\widetilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma^{b}_{a\alpha}\omega^{\alpha}_{b}, \quad \widetilde{\omega}_{\alpha} = \omega_{\alpha} - \Gamma^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{a}.$$

Компоненты объекта связности

$$\Gamma = \left\{\Gamma^{ac}_{b\alpha}, \Gamma^{ab}_{\alpha\beta}, \Gamma^{b}_{a\alpha}, \Gamma^{ab}_{\alpha}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^{a}_{\alpha\beta}\right\}$$

удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм

$$\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha} + (\delta^a_b\Gamma^c_{e\alpha} + \delta^a_e\Gamma^c_{b\alpha})\omega^e + \left(\Gamma^{ae}_{b\beta}\Lambda^{\beta c}_{\alpha} - \delta^a_b\Gamma^{ec}_{\alpha} - \delta^e_b\Gamma^{ac}_{\alpha}\right)\omega_e +$$
$$+\delta^c_b\omega^a_{\alpha} - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_{\alpha}\omega_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha} - \Gamma^{ab}_{e\alpha}\omega^e + \Gamma^{ac}_{\beta}\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\omega_c + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\omega^a_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{ab}_{\alpha\beta} + \Gamma^{ac}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\omega_c + \left(\delta^a_c\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \delta^{\gamma}_{\alpha}\Gamma^{ab}_{c\beta}\right)\omega^c_{\gamma} - \Gamma^{ab}_{\beta}\omega_{\alpha} +$$
$$+\Gamma^{b}_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \left(\Gamma^{\alpha b}_{\beta\mu}\Lambda^{\mu a}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{ba}_{\gamma}\right)\omega_b + \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{a}_{b\gamma}\omega^b -$$
$$-\left(\delta^{\mu}_{\beta}\Lambda^{\alpha a}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\Lambda^{\mu a}_{\gamma}\right)\omega_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^a_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^b_{a\alpha} + \left(\Gamma^{cb}_{a\alpha} + \Gamma^c_{a\beta}\Lambda^{\beta b}_\alpha\right)\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + \left(\Gamma^b_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma a}_\beta + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0.$$

Осуществим расширенное композиционное оснащение коконгруэнции $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой m-мерной плоскости L_m аналог плоскости Картана — плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку C на плоскости L_m (рис. 1).

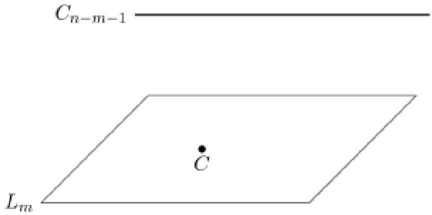

Рис. 1. Расширенное композиционное оснащение коконгруэнции

Аналитически точку и аналог плоскости Картана можно задать следующим образом:

$$C = A + \lambda^a A_a, C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A.$$

Данное оснащение позволяет охватить компоненты объекта связности тремя способами:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\lambda_\beta,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma\lambda_\mu,$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^a_\beta,$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta},$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta};$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\lambda_{\beta}\lambda^{a} - \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - 2\lambda^{a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}(\lambda^{a}_{\gamma} + \lambda_{\gamma}\lambda^{\alpha}) + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = \lambda^{a}_{\alpha\beta} + 2M^{\gamma a}_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma};$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = -\lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\left(\lambda^{a}_{\beta} + \mu^{a}_{\beta}\right) + \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\mu^{a}_{\gamma} - \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = -\lambda^{a}_{\alpha\beta},$$

где

$$\mu^{a}_{\alpha} = \lambda^{a}_{\alpha} - \lambda^{a}\lambda_{\alpha},\ M^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\left(\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{a}_{\beta} + \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\lambda_{\beta}\right).$$

Надо отметить, что дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^{a},\ \lambda^{a}_{\alpha}, \lambda_{\alpha}\}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^{a} - \lambda^{a}\lambda^{b}\omega_{b} + \omega^{a} = \lambda^{ab}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{b},\\ \Delta\lambda^{a}_{\alpha} + \lambda_{\alpha}\omega^{a} + \omega^{a}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},\\ \Delta\lambda_{\alpha} + \lambda^{a}_{\alpha}\omega_{a} + \omega_{\alpha} = \lambda^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{a},\end{gathered} \qquad (1)$$

а пфаффовы производные, стоящие в правых частях уравнений (1), удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha} + F^{\beta b}_{\alpha}\omega^{a}_{\beta} - \lambda^{a}F^{\beta b}_{\alpha}\omega_{\beta} +$$

$$+\left(\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\lambda^{ac}_{\beta} - \lambda^{ab}_{\alpha}\lambda^{c} - \lambda^{cb}_{\alpha}\lambda^{a}\right)\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda^{a}_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta}\omega^{a}_{\alpha} + \left(\Lambda^{\gamma a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha\gamma} + \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_{b} +$$

$$+\left(-M^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{\mu a}_{\beta}\lambda_{\mu}\right)\omega_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \left(-\delta^{a}_{c}M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \delta^{b}_{c}\delta^{\gamma}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta}\right)\omega^{c}_{\gamma} + \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda^{a}_{\gamma}\omega_{\alpha} +$$

$$+\Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha\gamma}^{ac}\omega_c+\lambda_{\alpha\beta}^{b}\omega^a \equiv 0,$$

где $F_{\alpha}^{\beta b} = \Lambda_{\alpha}^{\beta b} + \delta_{\alpha}^{\beta}\lambda^b$.

Находим дифференциалы точек C и C_α:

$$dC = \left[\theta + \lambda^a\omega_a - \lambda_\beta F_{\alpha}^{\beta a}\omega_a^\alpha\right]C + \left[\mathrm{F}_{\beta}^{\alpha a}\omega_a^\beta\right]C_\alpha +$$

$$+[\Delta\lambda^a + \omega^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b - \mu_\beta^a \mathrm{F}_{\alpha}^{\beta b}\omega_b^\alpha]A_a, \qquad (2)$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta\theta + \omega_\alpha^\beta - M_{\alpha\gamma}^{\beta a}\omega_a^\gamma\right]C_\beta + [\Delta\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha\omega^a + \omega_\alpha^a -$$

$$-\lambda^a\Delta\lambda_\alpha - \lambda^a\lambda_\alpha^b\omega_b - \lambda^a\omega_\alpha + (\lambda_\gamma^a \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda^a\lambda_\gamma \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b})\omega_b^\beta]A_a +$$

$$+\left[\, \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \omega_\alpha + \lambda_\gamma \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_a^\beta\right]C. \qquad (3)$$

Вводя формы связности в равенствах (2) и (3) и учитывая выражения ковариантных дифференциалов

$$\nabla\lambda^a = d\lambda^a + \lambda^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b + \widetilde{\omega}^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda_\beta^a\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a + \widetilde{\omega}_\alpha^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha,$$

получим

$$dC = \left[\theta + \lambda^a\widetilde{\omega}_a + \left(\Gamma_{b\alpha}^a\lambda^b - \lambda_\beta \mathrm{F}_\alpha^{\beta a}\right)\omega_a^\alpha\right]C + \left[\mathrm{F}_\beta^{\alpha a}\omega_a^\beta\right]C_\alpha +$$

$$+\left[\nabla\lambda^a + (\Gamma_\alpha^{ab} + \lambda^c\Gamma_{c\alpha}^{ab} - \lambda^a\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^b - \mathrm{F}_\alpha^{\beta b}\mu_\beta^a)\omega_b^\alpha\right]A_a, \qquad (4)$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta\theta + \widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta a} - \mathrm{M}_{\alpha\gamma}^{\beta a}\right)\omega_a^\gamma\right]C_\beta +$$

$$+[\nabla\lambda_\alpha^a - \lambda^a\nabla\lambda_\alpha + (\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^{ab} - \lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} + \lambda_\alpha\Gamma_\beta^{ab} + \lambda^a\lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} -$$

$$-\lambda^a\lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^b - \lambda^a\Gamma_{\alpha\beta}^b - \lambda^a\lambda_\gamma \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b} + \lambda_\gamma^a \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b})\omega_b^\beta]\,A_a +$$

$$+\left[\,\nabla\lambda_\alpha + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^a - \lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} + \lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a + \lambda_\gamma \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\right)\omega_a^\beta\right]C. \qquad (5)$$

Далее в равенствах (4, 5) учтем охваты трех типов:

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\tilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right) \omega_a^\beta\right] C_\alpha + \overset{01}{\nabla} \lambda^a A_a, \tag{6}$$

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\tilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right) \omega_a^\beta\right] C_\alpha + \left[\overset{02}{\nabla} \lambda^a + \sigma_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha\right] A_a, \tag{7}$$

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\tilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right) \omega_a^\beta\right] C_\alpha + \left[\overset{03}{\nabla} \lambda^a - \sigma_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha\right] A_a; \tag{8}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha C +$$

$$+ \left[\overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha\right] A_a, \tag{9}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta\right] C +$$

$$+ \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_\alpha \sigma_\beta^{ab} - \lambda^a \sigma_{\alpha\beta}^b\right) \omega_b^\beta\right] A_a, \tag{10}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \left[\overset{03}{\nabla} \lambda_\alpha - \sigma_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta\right] C +$$

$$+ \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \left(-\sigma_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha \sigma_\beta^{ab} + \lambda^a \sigma_{\alpha\beta}^b\right) \omega_b^\beta\right] A_a. \tag{11}$$

В выражения (7, 8, 10, 11) входят компоненты объекта деформации $\sigma = \{\sigma_{\alpha}^{ab}, \sigma_{\alpha\beta}^{ab}, \sigma_{\alpha\beta}^{a}\}$ (см.: [3; 15]):

$$\sigma_{\alpha}^{ab} = \lambda_{\alpha}^{ab} - \Lambda_{\alpha}^{\beta b}\mu_{\beta}^{a} - \lambda^{b}\mu_{\alpha}^{a},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{ab} = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_{\beta}^{ab}\lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha}^{b}\lambda_{\beta}^{a} - \Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha}\lambda_{\gamma}\lambda^{a} + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu_{\beta}^{a},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{a} = \lambda_{\alpha\beta}^{a} + \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\lambda_{\gamma}.$$

Теорема 1. *Параллельное перенесение аналога плоскости Картана C_{n-m-1} в произвольной связности является свободно вырожденным, то есть специальных смещений данной оснащающей плоскости, вообще говоря, не выделяется.*

Доказательство следует из равенств (5).

Теорема 2. *В групповой связности первого типа параллельное перенесение аналога плоскости Картана является связанно вырожденным, то есть плоскость C_{n-m-1} будет неподвижной при параллельном перенесении в указанной связности.*

Доказательство следует из равенств (9).

Теорема 3. *В групповых связностях второго и третьего типов параллельное перенесение аналога плоскости Картана является свободно вырожденным.*

Доказательство. При условии обращения ковариантных дифференциалов оснащающего квазитензора в нуль в равенствах (10) и (11) видно, что специальных смещений аналога плоскости Картана не выделяется.

Замечание. Аналогичные утверждения справедливы и по поводу смещений точки $C = A + \lambda^{a}A_{a}$, поскольку имеют место равенства (6—8).

Теорема 4. *Аналог плоскости Картана переносится параллельно в линейной комбинации связности первого типа тогда и только тогда, когда он смещается в плоскости $P_{n-m} =$ $= [C_{n-m-1}, C]$* (рис. 2).

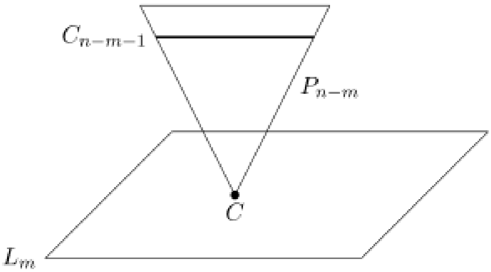

Рис. 2. Иллюстрация плоскостей

Доказательство.

При $\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha^a - \lambda^a\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha = 0$ в формуле (9) имеем

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta\theta + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta\lambda_\mu\Lambda_\gamma^{\mu a}\right)\omega_a^\gamma\right]C_\beta + \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha C,$$

следовательно, теорема верна.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.*Дифференциальная геометрия $(n-m)m$-мерных комплексов в n-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-17-27.

3. *Белова О.О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 39—48.

4. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 43—111.

5. *Кругляков Л.З.* О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16, вып. 3. С. 66—67.

6. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

7. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

8. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. 185—193.

9. *Absil P.-A., Mahony R., Sepulchre R.* Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. №80 (2). P. 199—220.

10. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. №177. P. 522—540.

11. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

12. *Kumar A., Caneses-Marin J. F., Lau C., Goulding R.* Parallel transport modeling of linear divertor simulators with fundamental ion cyclotron heating // Nucl. Fusion. 2023. №63. Art. №036004. doi: 10.1088/1741-4326/acb160.

13. *Louis M., Charlier B., Jusselin P. et al.* A Fanning Scheme for the Parallel Transport along Geodesics on Riemannian Manifolds // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2018. Vol. 56, №4. doi: 10.1137/17M11 30617.

14. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Diff. Geom. and its Appl. 2009. №27. P. 635—646.

15. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709.

16. *Rahula M.* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174. P. 675—697.

17. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

Для цитирования: *Белова О. О.* Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 57—69. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-4.

MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-4

Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on October 5, 2023

We continue to study the cocongruence of m-dimensional planes using the Cartan — Laptev method. In an n-dimensional projective space P_n, the cocongruence of m-dimensional planes can be given by the following equations $\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha a}_{\beta}\omega^{\beta}_{a}$.

Compositional clothing of a given cocongruence by fields of

$$(n-m-1)\text{-planes } C_{n-m-1}\colon\ L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$
$$\text{and points } C = A + \lambda^a A_a$$

allows one to define connections of three types in the associated bundle.

In the present paper, parallel transports of an analogue of Cartan plane are studied in the connections of three types. It is proved 4 theorems:

1. Parallel transport of the analogue of the Cartan plane C_{n-m-1} in an arbitrary connection is freely degenerate, i. e., in general, there are no special transports of this clothing plane.

2. In the group connection of the first type, the parallel transport of an analog of the Cartan plane is connected degenerate, i. e., the plane C_{n-m-1} will be fixed under parallel transport in this connection.

3. In the group connections of the second and third types, the parallel transport of the analogue of the Cartan plane is freely degenerate.

4. The analogue of the Cartan plane is transferred in parallel in a linear combination of the first type connection if and only if it is displaced in the plane $P_{n-m} = [C_{n-m-1}, C]$.

Keywords: projective space, cocongruence of m-dimensional planes, connection, parallel transport

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O.O.:* Differential geometry of (n-m)m-dimensional complexes in n-dimensional projective space. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Math. and ist App. Theme Reviews. 220, 17—27 (2023).

3. *Belova, O.O.:* The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54 (1), 39—48 (2023).

4. *Bliznikas, V.I.:* Some problems in the geometry of hypercomplexes of lines. Tr. Geom. Sem., 6, 43—111 (1974).

5. *Kruglyakov, L.Z.:* On some complexes of multidimensional planes in projective space. Functional analysis and its applications. **16**:3, 66—67 (1982).

6. *Polyakova, K.V., Shevchenko, Yu.I.:* Laptev — Lumiste's methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

7. *Norden, A.P.:* Spaces with affine connection. Moscow (1976).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).

9. *Absil, P.-A., Mahony, R., Sepulchre, R.:* Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation. Acta Applicandae Mathematicae, **80**:2, 199—220 (2004).

10. *Akivis, M.A., Shelekhov, A.M.:* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., 177, 522—540 (2011).

11. *Belova, O.O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

12. *Kumar, A., Caneses-Marin, J.F., Lau, C., Goulding, R.:* Parallel transport modeling of linear divertor simulators with fundamental ion cyclotron heating. Nucl. Fusion, 63, 036004 (2023), doi: 10.1088/1741-4326/acb160.

13. *Louis, M., Charlier, B., Jusselin, P. et al: A* Fanning Scheme for the Parallel Transport along Geodesics on Riemannian Manifolds. SIAM Journal on Numerical Analysis, **56**:4, 2563—2584 (2018), doi: 10.1137/17M1130617.

14. *Mansouri, A.-R.:* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Differential Geometry and its Applications, 27, 635—646 (2009).

15. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

16. *Rahula, M.:* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., 174, 675—697 (2011).

17. *Scholz, E.:* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

For citation: Belova, O. O. Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 55 (2), 57—69 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-4.