и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном про[странстве. Учебн. пособие. Калинингр. ун-т. Калининград, I9[.. 72 с.

5. М а л а х о в с к и й В.С. О многообразиях фигур в [однородном пространстве // Дифференциальная геометрия много[образий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I984. Вып.I5. С.55-59.

6. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: С[б. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I982. Вып.I3. С.6[.. 64.

7. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структ[ур]ы высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. с[е]минара / ВИНИТИ. М., I974. Т.6. С.II3-I34.

8. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а[н]у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометричес[кие] структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I979. Т.9.

9. М а л а х о в с к и й В.С. Структуры, порожденные [полем гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообра[зий] фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I985. Вып.I6. С.37-40.

УДК 5I4.75

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛЯ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ ОСНАЩЕННЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Рассмотрено n-параметрическое семейство Π_n оснащен[ных] коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств. В каждом из проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n определены ин[вариантные поля гиперквадрик, порожденные фундаментальным объектом Γ_2 второго порядка семейства Π_n. Исследованы ге[о]метрические образы, ассоциированные с инвариантными гиперк[ва]дриками.

I. Невырожденное семейство Π_n оснащенных коллинеаций π:

$$x^i = \frac{M^i_J X^J}{1 - P_K X^K} \quad (J, \mathcal{J}, K, i, j, k = \overline{1,n}) \tag{I.I}$$

[дв]ух проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n определяется системой [ур]авнений Пфаффа (I.6) работы [1]:

$$\omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \; \nabla M^i_J = M^i_{JK}\Omega^K, \; \nabla P_J + \Omega^0_J - M^k_J \omega^0_k = P_{JK}\Omega^K, \tag{I.2}$$

[г]де

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0, \; \Omega^J \overset{def}{=} \Omega^J_0, \; det(\lambda^i_J) \cdot det(M^i_J) \neq 0, \tag{I.3}$$

" ∇ " - символ ковариантного дифференцирования.

Продолжая уравнения (I.2), находим:

$$\begin{cases} \nabla \lambda^i_J = \lambda^i_{JK}\Omega^K, \; \nabla \lambda^i_{JK} + \lambda^i_{(J}\Omega^0_{K)} - \lambda^i_{(J}\lambda^k_{K)}\omega^0_k = \lambda^i_{JKL}\Omega^L, \\ \nabla M^i_{JK} + M^i_{(J}\Omega^0_{K)} - M^{(i}_J \lambda^{k)}_K \omega^0_k = M^i_{JKL}\Omega^L, \\ \nabla P_{JK} + P_{(J}\Omega^0_{K)} - M^k_{JK}\omega^0_k = P_{JKL}\Omega^L. \end{cases} \tag{I.4}$$

Рассмотрим системы величин

$$L_J = \frac{1}{n+1}(\overset{*}{M}{}^K_i M^i_{KJ} - \overset{*}{\lambda}{}^K_i \lambda^i_{KJ}), \tag{I.5}$$

$$\lambda_i = L_K \overset{*}{\lambda}{}^K_i, \quad m_i = L_K \overset{*}{M}{}^K_i, \tag{I.6}$$

[г]де $\overset{*}{\lambda}{}^K_i$, $\overset{*}{M}{}^K_i$ - взаимные тензоры к λ^i_J, M^i_J:

$$\overset{*}{\lambda}{}^K_i \lambda^i_J = \delta^K_J, \quad \overset{*}{M}{}^K_i M^i_J = \delta^K_J. \tag{I.7}$$

[Д]ифференцируя (I.5), (I.6), получим:

$$\nabla L_J = L_{JK}\Omega^K, \; \nabla \lambda_i = \lambda_{iK}\Omega^K, \quad \nabla m_i = m_{iK}\Omega^K, \tag{I.8}$$

[г]де

$$L_{JK} = \frac{1}{n+1}(\overset{*}{M}{}^L_i M^i_{LJK} - \overset{*}{\lambda}{}^L_i \lambda^i_{LJK} + \overset{*}{\lambda}{}^L_k \overset{*}{\lambda}{}^H_i \lambda^k_{HK}\lambda^i_{LJ} - \overset{*}{M}{}^L_k \overset{*}{M}{}^H_i M^k_{HK} M^i_{LJ}), \tag{I.9}$$

$$\lambda_{iK} = L_{KL}\overset{*}{\lambda}{}^J_i + L_J \overset{*}{\lambda}{}^J_{iK}, \tag{I.I0}$$

$$m_{iK} = L_{KL}\overset{*}{M}{}^J_i + L_J \overset{*}{M}{}^J_{iK}. \tag{I.II}$$

Из формулы (I.8) следует, что системы величин $\{L_J\}$, $\{\lambda_i\}$ являются тензорами. Тензор $\{L_J\}$ задает в проективном [п]ространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$L_J X^J = 0, \tag{I.I2}$$

[п]роходящую через точку A_0. Тензоры $\{\lambda_i\}$ и $\{m_i\}$ определяют [в] пространстве p_n инвариантные гиперплоскости, проходящие [ч]ерез точку a_0.

2. Рассмотрим системы величин

$$q_{ij} = -\lambda_{(i|K|}\overset{*}{\lambda}{}^K_{j)}, \quad s_{ij} = -m_{(i|K|}\overset{*}{\lambda}{}^K_{j)}. \tag{2.I}$$

Дифференцируя (2.1) при фиксированных первичных параметрах, т.е. когда $\Omega^J = 0$, получим:

$$\overset{0}{\nabla} q_{ij} = \lambda_i \pi^0_j + \lambda_j \pi^0_i, \qquad (2.2)$$

$$\overset{0}{\nabla} s_{ij} = m_i \pi^0_j + m_j \pi^0_i, \qquad (2.3)$$

где

$$\pi^0_i = \omega^0_i \big|_{\Omega^J = 0}, \qquad (2.4)$$

а нолик над оператором ∇ означает фиксацию первичных параметров.

Из (1.8), (2.2), (2.4) следует, что системы величин $\{g_{ij}, \lambda_K\}, \{s_{ij}, m_K\}$ образуют линейные геометрические объекты. Они определяют в пространстве P_n два поля инвариантных гиперквадрик:

$$q \equiv q_{ij} x^i x^j + 2\lambda_i x^i = 0, \qquad (2.5)$$

$$s \equiv s_{ij} x^i x^j + 2 m_i x^i = 0, \qquad (2.6)$$

проходящие через точку a_0. Действительно, используя (1.8), (2.2), (2.3), находим:

$$\delta q = \alpha q, \quad \delta s = \beta s, \qquad (2.7)$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам.

Индуцированное точечное отображение $\varphi: \mathfrak{P}_n \to P_n$ порождает в пространстве $\mathfrak{P}_n$ поля инвариантных квадрик Q и S:

$$Q \equiv Q_{JK} X^J X^K + 2 L_K X^K = 0, \qquad (2.8)$$

$$S \equiv S_{JK} X^J X^K + 2 S_K X^K = 0, \qquad (2.9)$$

где

$$Q_{JK} = \lambda^i_J \lambda^j_K q_{ij} - \lambda^i_{JK} \lambda_i,$$

$$S_{JK} = \lambda^i_J \lambda^j_K s_{ij} - \lambda^i_{JK} m_i, \quad S_K = \lambda^i_K m_i. \qquad (2.10)$$

Действительно, дифференцируя (2.8) и (2.9) при фиксированных первичных параметрах, получим:

$$\delta Q = \alpha_1 Q, \quad \delta S = \beta_1 S. \qquad (2.11)$$

Коллинеация $\pi^{-1}: P_n \to \mathfrak{P}_n$ отображает гиперквадрики q и s в инвариантные гиперквадрики $\pi^{-1}(q)$ и $\pi^{-1}(s)$.

Используя формулы

$$X^J = \frac{\overset{*}{M}{}^J_i x^i}{1 + P_K \overset{*}{M}{}^K_k x^k}, \qquad (2.12)$$

задающие преобразование π^{-1}, находим уравнения этих гиперквадрик:

$$(q_{ij} M^i_J M^j_K - \lambda_i M^i_{(J} P_{K)}) X^J X^K + 2\lambda_i M^i_K X^K = 0, \qquad (2.13)$$

$$(s_{ij} M^i_J M^j_K - m_i M^i_{(J} P_{K)}) X^J X^K + 2 L_K X^K = 0. \qquad (2.14)$$

Таким образом, невырожденное семейство Π_n порождает в пространстве P_n два инвариантных поля гиперквадрик: q, s; в пространстве $\mathfrak{P}_n$ оно порождает четыре инвариантных поля гиперквадрик: $Q, S, \pi^{-1}(q), \pi^{-1}(s)$.

3. Гиперплоскости

$$\lambda_i x^i = 0, \quad m_i x^i = 0 \qquad (2.15)$$

являются касательными гиперплоскостями к гиперквадрикам q и s в инвариантной точке $a_0 \in P_n$. Их пересечение задает в P_n инвариантное $(n-2)$-мерное подпространство. Касательные гиперплоскости к гиперквадрикам Q и $\pi^{-1}(s)$ в точке A_0 определяются одним уравнением (1.12), т.е. совпадают. Следовательно, гиперквадрики Q и $\pi^{-1}(s)$ касаются друг друга в точке A_0. Касательные гиперплоскости к гиперквадрикам S и $\pi^{-1}(q)$ определяются соответственно уравнениями:

$$S_K X^K = 0, \qquad (2.16)$$

$$\lambda_i M^i_K X^K = 0. \qquad (2.17)$$

Попарные пересечения гиперплоскостей (1.12), (2.16), (2.17) определяют в $\mathfrak{P}_n$ инвариантные $(n-2)$-мерные подпространства, содержащие точку A_0, а множество общих точек этих трех гиперплоскостей задает в $\mathfrak{P}_n$ при $n>3$ инвариантное $(n-3)$-мерное подпространство, проходящее через точку A_0.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.