УДК 514.75

КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ 2-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^4

М.А.Чешкова

(Алтайский государственный университет)

Рассматриваются две гладкие 2-поверхности $M, \bar M$ в евклидовом пространстве E^4 и диффеоморфизм $f: M \to \bar M$. Преполагается, что касательные плоскости в соответствующих точках ортогональны.

1. Пусть $\eta, \bar\eta$ – векторы средних кривизн поверхностей $M, \bar M$ в соответствующих точках, $K, \bar K$ – скалярные кривизны $M, \bar M$ соответственно.

Теорема 1. Если $\bar\eta = -df^{-1}(\eta)$, то следующие утверждения эквивалентны: 1) $K = 0$, 2) $\bar K = 0$.

Теорема 2. Если $\bar\eta = -df^{-1}(\eta)$ и $K^2 + \bar K^2 \neq 0$, то отображение $f: M \to \bar M$ конформное.

2. Пусть $f: M \to \bar M$ – диффеоморфизм, $df_p: T_pM \to T_{f(p)}\bar M$ – дифференциал отображения f в точке $p \in M$. Перенесем вектор $df_p X_p \in T_{f(p)}\bar M$, $X_p \in T_pM$ параллельно в точку $p \in M$. Так как касательные плоскости к поверхностям $M, \bar M$ в соответствующих точках ортогональны, то для любой точки $p \in M$ определено линейное отображение $\omega: T_pM \to T_pM^\perp$, где $\omega X_p = df_p X_p$.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид [1]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \quad \partial_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi,$$

где $X, Y \in TM$, $\xi \in TM^\perp$, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$, $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в E^4, $\nabla^\perp$ – нормальная связность, A_ξ – оператор Вейнгартена, соответствующий полю ξ, α – вторая фундаментальная форма поверхности M, ∂ – дифференцирование в E^4.

Пусть r радиус-вектор точки $p \in M$. Тогда отображение ω определяется из равенства

$$\partial_X f r = df(\partial_x r) = dfX = \omega X,$$

где $\partial_x r = X \in TM$.

Рассматривая в E^4 плоскую связность ∂, имеем

$$\partial_X \partial_Y fr - \partial_Y \partial_X fr - \partial_{[X,Y]} fr = \partial_X \omega Y - \partial_Y \omega X - \omega[X,Y] = 0.$$

Используя (1), получим

$$A_{\omega X} Y = A_{\omega Y} X, \quad d^\perp \omega(X,Y) = 0, \tag{2}$$

где

$$d^\perp \omega(X,Y) = \nabla^\perp_X \omega Y - \nabla^\perp_Y \omega X - \omega[X,Y]$$

– внешний дифференциал ω в связности $\nabla^\perp$.

Отображение $f: M \to \bar M$ индуцирует на M метрику

$$\bar g(X,Y) = \langle dfX, dfY\rangle = \langle \omega X, \omega Y\rangle$$

и связность

$$\bar\nabla_X Y = \omega^{-1} \nabla^\perp_X \omega Y,$$

которая является [2] связностью Леви-Чивита метрики $\bar g$.

Вторая фундаментальная форма и операторы Вейнгартена поверхности $\bar M$ в точке $f(p)$ определяют билинейные отображения

$$\bar\alpha: T_pM \times T_pM \to T_pM, \quad \bar A_X: T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$$

по правилу

$$\bar\alpha(X,Y) = \partial_X dfY - df\bar\nabla_X Y, \quad \langle \bar A_X \omega Y, \omega Z\rangle = \langle X, \bar\alpha(Y,Z)\rangle. \tag{3}$$

В силу (1), (2) получим

$$\bar\alpha(X,Y) = -A_{\omega X} Y, \quad \alpha(X,Y) = -\bar A_X \omega Y. \tag{4}$$

Очевидно,

$$\bar A_X \omega Y = \bar A_Y \omega X. \tag{5}$$

Форма

$$\psi(X,Y,Z) = \langle X, \bar\alpha(Y,Z)\rangle = -\langle A_{\omega Y} Z, X\rangle$$

в силу (2), (4), (5) симметричная.

Рассмотрим формы $b, \bar b, \beta, \bar\beta$ – аналоги второй и третьей квадратичных форм гиперповерхности:

$$b(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), \eta\rangle, \quad \bar b(X,Y) = \langle \bar\alpha(X,Y), \bar\eta\rangle,$$

$$\beta(X,Y) = \bar g^{ij} \langle A_{\omega X_i} X, A_{\omega X_j} Y\rangle, \quad \bar\beta(X,Y) = g^{ij} \langle \bar A_{X_i} X, \bar A_{X_j} Y\rangle,$$

где X_i $(i, \ldots = 1,2)$ – некоторый базис T_pM,

$$g_{ij} = g(X_i, X_j), \quad \bar g_{ij} = \bar g(X_i, X_j),$$

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \quad \bar g_{ik} \bar g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Лемма 1. Имеет место формула

$$\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle - \langle \bar\alpha(X,Y), \omega^{-1}\xi\rangle.$$

Доказательство. В силу (2), (4) получим

$$\langle \bar\alpha(X,Y),\ \omega^{-1}\xi\rangle = -\langle \underset{\omega X}{A} Y,\ \omega^{-1}\xi\rangle = -\langle \underset{\omega X}{A}\omega^{-1}\xi, Y\rangle =$$

$$= -\langle \underset{\xi}{A} X, Y\rangle = -\langle \alpha(X,Y),\xi\rangle .$$

Л е м м а 2. Формы $\beta, \bar\beta$ равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X_i – базис $T_p M$, ωX_i – соответствующий базис $T_p M^1$. Тогда

$$\underset{\omega X}{A} X_i = \underset{\omega X}{A^k_i} X_k,\quad \underset{X}{\bar A}\,\omega X_j = \underset{X}{\bar A^k_j}\,\omega X_k .$$

Из (3), (4) имеем

$$\underset{X}{\bar A^k_i}\,\bar g_{kj} = -\underset{\omega X}{A^k_i}\, g_{kj} .$$

Используя симметричность формы $\psi(X,Y,Z)$, получим

$$\beta(X,Y) = \bar g^{ij}\underset{\omega X}{A^k_i}\,\underset{\omega Y}{A^m_j}\, g_{km} = \bar g^{ij}\,\underset{X}{\bar A^p_i}\,\bar g_{ps}\, g^{sk}\,\underset{Y}{\bar A^\alpha_j}\,\bar g_{\alpha\beta}\, g^{\beta m} g_{km} =$$

$$= g^{sk}\,\underset{X}{\bar A^j_s}\,\underset{Y}{\bar A^\alpha_j}\,\bar g_{\alpha k} = \bar\beta(X,Y).$$

3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I. Обозначим $R,\bar R$ – тензоры Риччи связностей $\nabla,\bar\nabla$ соответственно. Имеют место [3] соотношения

$$R(X,Y) = 2b(X,Y) - \beta(X,Y),\quad \bar R(X,Y) = 2\bar b(X,Y) - \bar\beta(X,Y).$$

Так как [4]

$$R(X,Y) = \tfrac12 K g(X,Y),\quad \bar R(X,Y) = \tfrac12 \bar K \bar g(X,Y),$$

где $K,\bar K$ скалярные кривизны связностей $\nabla,\bar\nabla$ и по условию $\bar\eta = -df^{-1}(\eta) = -\omega^{-1}\eta$, то в силу леммы I $b=\bar b$.

В силу леммы 2 $\beta=\bar\beta$, поэтому $Kg(X,Y)=\bar K\bar g(X,Y)$, откуда следует утверждение теоремы.

4. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Если $\bar\eta=-\omega^{-1}\eta$ и $K^2+\bar K^2\neq 0$, то $\bar g(X,Y) = K/\bar K\, g(X,Y)$, т.е. отображение $f: M\to\bar M$ конформное.

С л е д с т в и е. Если поверхности $M,\bar M$ минимальные и $K^2+\bar K^2\neq 0$, то отображение $f: M\to\bar M$ конформное.

5. П р и м е р ы. I) Торы Клиффорда

$$r = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v),$$

$\bar r = fr = (-\sin u, \cos u, -\sin v, \cos v)$ – взаимоортогональные поверхности. Для них $K=\bar K=0$,

$$\beta=\bar\beta=2b=2\bar b,\quad \eta=\tfrac12(\bar r_u+\bar r_v),\quad \bar\eta=\omega^{-1}\eta .$$

2) Пусть M огибающая нормальных плоскостей кривой $\gamma\subset E^3$; e – единичный вектор, ортогональный E^3. Поверхность $\bar M$ – цилиндр с направляющей γ и образующей e. Пусть $\gamma: \rho=\rho(s)$, где s – длина γ. Тогда

$$M:\ r = \rho(s) + \tfrac1k\nu(s) + un(s),$$

$$\bar M:\ \bar r = fr = \rho(s) + ue,$$

где k – кривизна кривой γ, $\{\tau,\nu,n\}$ – репер Френе. Тогда

$$K=\bar K=0,\quad \beta=\bar\beta=2b=2\bar b=\begin{pmatrix}k^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\eta = -\tfrac12\frac{k}{c}\tau,\quad \bar\eta = \tfrac12\cdot\frac{k}{c}X_1 - \frac{kB}{2c}X_2,$$

$$X_1 = r_s = \omega^{-1}(\tau),\quad X_2 = r_u = \omega^{-1}(e),$$

где

$$c = -\frac{k'}{k^2} - u\varkappa,\quad B=\frac{\varkappa}{k},$$

$\varkappa$ – кручение кривой γ.

Имеем

$$\omega\bar\eta = \frac{k}{2c}\tau - \frac{kB}{2c}e .$$

Пусть φ угол между векторами $\eta, -\omega(\bar\eta)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\varkappa/k)^2}} .$$

Следовательно, угол между векторами $\eta, -\omega(\bar\eta)$ постоянный тогда и только тогда, когда $\varkappa/k = \mathrm{const}$, т.е. кривая γ есть линия откоса.

3) Пусть γ_i – две плоские кривые, плоскости которых ортогональны, $\bar\gamma_i$ – их эволюты. Поверхности $M,\bar M$ есть поверхности переноса. Если $\gamma_i:\ \rho_i=\rho_i(s_i)$ – кривые, $\{\tau_i(s_i), \nu_i(s_i)\}$ – реперы Френе, k_i – кривизны γ_i ($k_i\neq \mathrm{const}$), s_i – длины γ_i, то

$$M:\ r = \rho_1(s_1)+\rho_2(s_2),$$

$$\bar M:\ \bar r = \rho_1(s_1) + \frac{1}{k_1}\nu_1(s_1) + \rho_2(s_2) + \frac{1}{k_2}\nu_2(s_2),$$

$$r_1=\tau_1,\quad r_2=\tau_2,\quad \bar r_1 = \omega r_1 = -\frac{k_1'}{(k_1)^2}\nu_1,$$

$$\bar r_2 = \omega r_2 = -\frac{k_2'}{(k_2)^2}\nu_2,\quad g_{ij}=\delta_{ij},\quad \bar g_{ij} = \begin{bmatrix} k_1'/k_1^2 & 0\\ 0 & k_2'/k_2^2\end{bmatrix},$$

$$\beta=\bar\beta=2b=2\bar b=\begin{bmatrix}(k_1)^4/k_1' & 0\\ 0 & (k_2)^4/k_2'\end{bmatrix},$$

$$\eta = -\omega(\bar{\eta}) = -\frac{1}{2}\left[\frac{(k_1)^3}{k_1'}\bar{\tau}_1 + \frac{(k_2)^3}{k_2'}\bar{\tau}_2\right].$$

4) Поверхности $M, \bar{M}$ зададим уравнениями

$$M: \tau = (u, v, 2uv, u^2 - v^2),$$

$$\bar{M}: \bar{\tau} = (-2uv(u-v) - \frac{2}{3}u^3 - \frac{2}{3}v^3, \quad 2uv(u+v) - $$

$$-\frac{2}{3}u^3 - \frac{2}{3}v^3, \ -uv + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2, \quad uv + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2).$$

Имеем

$$\tau_1 = (1, 0, 2v, 2u), \quad \tau_2 = (0, 1, 2u, -2v),$$

$$g_{ij} = e\delta_{ij}, \quad e = 1 + 4u^2 + 4v^2,$$

$$\bar{\tau}_1 = \omega\tau_1 = (u-v)n_1 + (u+v)n_2,$$

$$\bar{\tau}_2 = \omega\tau_2 = -(u+v)n_1 + (u-v)n_2,$$

$$n_1 = (-2v, -2u, 1, 0), \quad n_2 = (-2u, 2v, 0, 1),$$

$$\langle n_i, n_j \rangle = e\delta_{ij}, \quad \bar{g}_{ij} = \bar{e}g_{ij}, \quad \bar{e} = e(u^2+v^2).$$

Отображение $f: M \to \bar{M}$ конформное. В базисе τ_i, $\omega\tau_i$ имеем

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} u+v & v-u \\ v-u & -u-v \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha}^2 = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} v-u & -u-v \\ -u-v & u-v \end{bmatrix},$$

$$\underset{\tau_k}{\bar{A}}{}_i^j = \frac{e}{\bar{e}}\alpha^k_{ij}, \quad tr\underset{\tau_k}{\bar{A}} = 0, \quad \underset{\bar{\tau}_k}{A}{}_i^j = \frac{\bar{e}}{e}\alpha^k_{ij}, \quad tr\underset{\bar{\tau}_k}{A} = 0,$$

$$\alpha^1 = \frac{2}{\bar{e}}\begin{bmatrix} u+v & u-v \\ u-v & -u-v \end{bmatrix}, \quad \alpha^2 = \frac{2}{\bar{e}}\begin{bmatrix} u-v & -u-v \\ -u-v & v-u \end{bmatrix}.$$

Обе поверхности $M, \bar{M}$ минимальные.

Библиографический список

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 412 с.

2. Cheskova M.A. On geometry of the ortogonal surfaces // Webs & Quasigroups. Tver, 1993. P. 78-82.

3. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М.: Высш. шк., 1989. 224 с.

4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. 703 с.

УДК 514.76

ОСНАЩЕНИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ГОЛОНОМНОГО И НЕГОЛОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И.Шевченко

(Калининградский государственный университет)

Для подмногообразия дифференцируемого многообразия в голономном и неголономном случаях введены и исследованы прикасающиеся пространства, ассоциированное главное расслоение и оснащения. Показано, что оснащения играют разные роли: эквивалентны связностям, индуцируют связности, сводят связность к подсвязности, порождаются связностями и другими оснащениями.

1. Дифференцируемые многообразия. Рассмотрим локально n-мерное многообразие V_n некоторого класса дифференцируемости. Смещение ∂x любой точки $x \in V_n$ с точностью до бесконечно малых 1-го порядка лежит в касательном n-пространстве T_n к многообразию V_n в точке x [1, с.162], [2, с.54], [3, с.49]:

$$\partial x = \omega^J e_J \quad (J, \mathcal{J}, K, \mathcal{L} = \overline{1,n}), \qquad (1)$$

где e_J – базисные векторы линейного пространства T_n, ω^J – структурные формы многообразия V_n. Формы ω^J удовлетворяют структурным уравнениям Лаптева [1]:

$$\mathcal{D}\omega^J = \omega^{\mathcal{J}} \wedge \omega^J_{\mathcal{J}}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{D}$ – знак внешнего дифференциала.

Предполагая, что

$$\mathcal{D}(\partial x) = 0, \qquad (3)$$

продифференцируем внешним образом уравнение (1) и разрешим по лемме Картана:

$$\partial e_J = \omega^{\mathcal{J}}_J e_{\mathcal{J}} + \omega^{\mathcal{J}} e_{J\mathcal{J}}, \qquad (4)$$

где новые векторы $e_{J\mathcal{J}}$, принадлежащие соприкасающемуся пространству $T(n) \supset T_n$, симметричны:

$$e_{[J\mathcal{J}]} = 0, \qquad (5)$$

причем квадратные скобки обозначают альтернирование.

Дифференцируя уравнения (2) внешним образом и разрешая по обобщенной лемме Картана [1], получим