Yu. Popov

Foss and Green normalization
for $\mathcal{H}(L)$-distribution of affine space

For the basic structure subbundles of the hyperstrip $\mathcal{H}(L)$-distribution of affine space A_n we construct Foss and Green normalization in the inner invariant manner. Throughout the article we use designations of [1; 2].

Key words: distribution, subbundle, normalization, focal variety, focal cone.

УДК 514.76

Н. А. Рязанов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
ryazanov-92@mail.ru

Дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в несимметричном случае

Выведены дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в случае несимметричного объекта связности. Эти сравнения показывают, что в общем случае объект кривизны 2-го порядка образует геометрический объект лишь в совокупности с объектом кривизны 1-го порядка и объектом связности 2-го порядка.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, аффинная связность, объект кривизны 2-го порядка, голономное, полуголономное и неголономное гладкие многообразия.

Рассмотрим структурные уравнения Лаптева n-мерного гладкого многообразия M_n:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i, j, k, ... = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где D — символ внешнего дифференциала, $\wedge$ — знак внешнего умножения, ω^i — главные линейные дифференциальные формы, ω^j_i — вторичные линейные дифференциальные формы. Продолжим структурные уравнения (1) на многообразии M_n. Замыкая их, найдем

$$(D\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешая эти кубичные уравнения по лемме Лаптева, получим [1]:

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \tag{2}$$

Уравнения (1, 2) являются структурными уравнения Лаптева главного расслоения линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$ над гладким многообразием M_n.

Аффинная связность (без кручения) для n-мерного многообразия M_n определяется в расслоенном пространстве $L_{n^2}(M_n)$ путем задания объекта связности Γ^i_{jk}. Рассмотрим общий случай, когда компоненты Γ^i_{jk} несимметричны по нижним индексам $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$. Формы связности имеют вид [2]

$$\Omega^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{jk}\omega^k. \tag{3}$$

Замечание 1. Формы связности в работе [2] берутся со знаком «плюс», в работе [3] со знаком «минус». Полученные результаты будут отличаться с точностью до знака, что несущественно влияет на вычисления.

Дифференцируя формы (3) внешним образом с учетом (1, 2), получим:

$$D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i - \omega^k \wedge (d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^l \omega_l^i - \Gamma_{lk}^i \omega_j^l - \\ - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{lt}^i \omega^t - \omega_{jk}^i). \tag{4}$$

Компоненты объекта аффинной связности Γ_{jk}^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям[2]:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i - \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l , \tag{5}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^l \omega_l^i - \Gamma_{lk}^i \omega_j^l - \Gamma_{jl}^i \omega_k^l .$$

Тогда уравнения (4) можно записать в виде

$$D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i - \omega^k \wedge (\Gamma_{jkl}^i \omega^l + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{lt}^i \omega^t) .$$

Вынося общие базисные формы ω^l за скобку, получим:

$$D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i - (\Gamma_{jkl}^i + \Gamma_{jk}^t \Gamma_{tl}^i) \omega^k \wedge \omega^l .$$

Альтернируя коэффициенты в последнем слагаемом, введем обозначение:

$$D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l , \; R_{jkl}^i = -(\Gamma_{j[kl]}^i + \Gamma_{j[k}^t \Gamma_{tl]}^i), \tag{6}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках. Получили структурные уравнения для форм связности Ω_j^i, включающие в себя компоненты объекта кривизны R_{jkl}^i .

Замечание 2. Обозначение (6_2) содержат альтернирование без множителя, которое будет производиться и в дальнейших вычислениях.

Продолжая уравнения (2) с учетом их самих, а также (1), получим:

$$D\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}. \qquad (7)$$

Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных Γ^i_{jkl} объекта Γ^i_{jk} $(\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj})$. Для этого замкнем уравнения (5) с помощью структурных уравнений (1, 2, 7):

$$d\Gamma^i_{jkl} \wedge \omega^l - \Gamma^l_{jkt}\omega^t \wedge \omega^i_l + \Gamma^i_{jkl}\omega^t \wedge \omega^l_t +$$

$$+\Gamma^i_{tkl}\omega^l \wedge \omega^t_j + \Gamma^i_{jlt}\omega^t \wedge \omega^l_k + \Gamma^i_{jl}\omega^t \wedge \omega^l_{kt} +$$

$$+\Gamma^i_{lk}\omega^t \wedge \omega^l_{jt} - \Gamma^l_{jk}\omega^t \wedge \omega^i_{lt} + \omega^t \wedge \omega^i_{jkt} = 0.$$

Вынося общие базисные формы ω^l за скобку и собирая первые пять слагаемых под дифференциальный оператор $\Delta\Gamma^i_{jkl}$, имеем

$$(\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^t_{jk}\omega^i_{tl} - \Gamma^i_{tk}\omega^t_{jl} - \Gamma^i_{jt}\omega^t_{kl} - \omega^i_{jkl}) \wedge \omega^l = 0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам k и l, получим сравнения по модулю базисных форм ω^l:

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^t_{j[k}\omega^i_{tl]} - \Gamma^i_{t[k}\omega^t_{jl]} - \Gamma^i_{jt}\omega^t_{[kl]} - \omega^i_{j[kl]} \cong 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^l). \qquad (8)$$

Найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты объекта кривизны R^i_{jkl} аффинной связности 1-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений $\Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl}$ и проальтернируем их по индексам k и l:

$$\Delta\Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]} \cong \omega^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]} + \Gamma^t_{j[k}\omega^i_{tl]}. \qquad (9)$$

Применяя дифференциальный оператор Δ к обеим частям равенства (6_2), а также учитывая (8) и (9), получим:

$$\Delta R^i_{jkl} \cong -\Gamma^i_{jt}\omega^t_{[kl]} - \omega^i_{j[kl]}. \qquad (10)$$

Замечание 3. Результат, полученный в случае симметричного объекта связности $(\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj})$, совпадает с (10).

В случае [5] полуголономного гладкого многообразия M_n 2-го порядка ($\omega^i_{[jk]} \cong 0, \omega^i_{j[kl]} \cong 0$) дифференциальные сравнения (10) для компонент объекта кривизны R^i_{jkl} аффинной связности примут тензорный вид: $\Delta R^i_{jkl} \cong 0$.

Утверждение. *Аффинная связность (1-го порядка) задается в расслоении линейных реперов* $L_{n^2}(M_n)$ *со структурными уравнениями (1, 2) с помощью поля объекта* Γ^i_{jk} $(\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj})$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5). Объект* Γ^i_{jk} *определяет формы аффинной связности* Ω^i_j *(3), удовлетворяющие структурным уравнениям* (6_1), *в которые входят компоненты объекта кривизны* R^i_{jkl}. *Компоненты* R^i_{jkl} *выражаются по формулам* (6_2) *и удовлетворяют (ср. [3, с. 52]) дифференциальным сравнениям (10). Если гладкое многообразие* M_n *является неголономным многообразием* M^N_n *[3; 4], то есть не выполняются сравнения* $\omega^m_{[kl]} \cong 0, \omega^i_{j[kl]} \cong 0$, *то объект кривизны аффинной связности* R^i_{jkl} *образует квазитензор лишь в совокупности с объектом связности* Γ^i_{jk}. *В случае полуголономного [5] гладкого многообразия* M^S_n, *когда* $\omega^m_{[kl]} \cong 0, \omega^i_{j[kl]} \cong 0$, *объект кривизны* R^i_{jkl} *— тензор.*

Формы аффинной связности 2-го порядка [2] состоят из форм (3) и следующих:

$$\Omega^i_{jk} = \omega^i_{jk} + L^i_{jkl}\omega^l . \tag{11}$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом (1, 2, 7), получим:

$$\begin{aligned} D\Omega^i_{jk} &= \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \omega^l \wedge (dL^i_{jkl} + \\ &+ L^t_{jkl}\omega^i_t - L^i_{tkl}\omega^t_j - L^i_{jtl}\omega^t_k - L^i_{jkt}\omega^t_l - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jk} + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)} - \\ &- \omega^i_{jkl} + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl}\omega^m - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl}\omega^m - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl}\omega^m). \end{aligned} \tag{12}$$

Компоненты L^i_{jkl} объекта аффинной связности 2-го порядка $L = \{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta L^i_{jkl} - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jk} + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)} - \omega^i_{jkl} = L^i_{jklm}\omega^m, \tag{13}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta L^i_{jkl} = dL^i_{jkl} + L^t_{jkl}\omega^i_t - L^i_{tkl}\omega^t_j - L^i_{jtl}\omega^t_k - L^i_{jkt}\omega^t_l .$$

Тогда уравнения (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} D\Omega^i_{jk} &= \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \\ &-\omega^l \wedge (L^i_{jklm}\omega^m + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl}\omega^m - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl}\omega^m - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl}\omega^m). \end{aligned}$$

Вынося общие базисные формы ω^m за скобку, получим:

$$\begin{aligned} D\Omega^i_{jk} &= \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l - \\ &-(L^i_{jklm} + L^t_{jkm}\Gamma^i_{tl} - L^i_{tkm}\Gamma^t_{jl} - L^i_{jtm}\Gamma^t_{kl})\omega^l \wedge \omega^m. \end{aligned}$$

Альтернируя последнее слагаемое по индексам l и m, введем обозначение [2; 4]:

$$\begin{aligned} D\Omega^i_{jk} &= \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{lk} + \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l + \frac{1}{2}R^i_{jklm}\omega^l \wedge \omega^m, \\ R^i_{jklm} &= -(L^i_{jk[lm]} + \Gamma^t_{k[l}L^i_{jtm]} + \Gamma^t_{j[l}L^i_{tkm]} - \Gamma^i_{t[l}L^t_{jkm]}). \end{aligned} \tag{14}$$

Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных L^i_{jklm} объекта L^i_{jkl}. Для этого замкнем уравнения (13) с помощью структурных уравнений (1, 2, 7):

$$
\begin{aligned}
& dL^i_{jklm} \wedge \omega^m - L^t_{jklm}\omega^m \wedge \omega^i_t + L^i_{jklt}\omega^m \wedge \omega^t_m + L^i_{tklm}\omega^m \wedge \omega^t_j + \\
& + L^i_{jtlm}\omega^m \wedge \omega^t_k + L^i_{jktm}\omega^m \wedge \omega^t_l + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)m} \wedge \omega^m - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jkm} \wedge \omega^m + \\
& + L^t_{jkl}\omega^i_{tm} \wedge \omega^m - L^i_{tkl}\omega^t_{jm} \wedge \omega^m - L^i_{jtl}\omega^t_{km} \wedge \omega^m - L^i_{jkt}\omega^t_{lm} \wedge \omega^m + \\
& + \Gamma^t_{klm}\omega^i_{jt} \wedge \omega^m + \Gamma^t_{jlm}\omega^i_{tk} \wedge \omega^m - \Gamma^i_{tlm}\omega^t_{jk} \wedge \omega^m - \omega^i_{jklm} \wedge \omega^m = 0,
\end{aligned}
$$

где симметрирование в скобках производится по индексам k и j. Вынося общие базисные формы ω^m за скобку и собирая первые шесть слагаемых под дифференциальный оператор ΔL^i_{jklm}, имеем

$$
\begin{aligned}
& (\Delta L^i_{jklm} + \Gamma^t_{(kl}\omega^i_{tj)m} - \Gamma^i_{tl}\omega^t_{jkm} + L^t_{jkl}\omega^i_{tm} - L^i_{tkl}\omega^t_{jm} - L^i_{jtl}\omega^t_{km} - \\
& - L^i_{jkt}\omega^t_{lm} + \Gamma^t_{klm}\omega^i_{jt} + \Gamma^t_{jlm}\omega^i_{tk} - \Gamma^i_{tlm}\omega^t_{jk} - \omega^i_{jklm}) \wedge \omega^m = 0.
\end{aligned}
$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам l и m, получим сравнения по модулю базисных форм ω^m:

$$
\begin{aligned}
& \Delta L^i_{jk[lm]} + \Gamma^t_{(k[l}\omega^i_{tj)m]} - \Gamma^i_{t[l}\omega^t_{jkm]} + L^t_{jk[l}\omega^i_{tm]} - \\
& - L^i_{tk[l}\omega^t_{jm]} - L^i_{jt[l}\omega^t_{km]} - L^i_{jkt}\omega^t_{[lm]} + \Gamma^t_{k[lm]}\omega^i_{jt} + \\
& + \Gamma^t_{j[lm]}\omega^i_{tk} - \Gamma^i_{t[lm]}\omega^t_{jk} - \omega^i_{jk[lm]} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^m).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты объекта кривизны R^i_{jklm} аффинной связности 2-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений, входящих в формулу (14_2) и проальтернируем их по индексам l и m:

$$\begin{aligned}
\Delta L^t_{jk[l}\Gamma^i_{m]t} &\cong -\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{[mt}\omega^t_{sl]} + \Gamma^t_{sk}\Gamma^i_{[mt}\omega^s_{jl]} + \\
&\quad + \Gamma^t_{js}\Gamma^i_{[mt}\omega^s_{kl]} + \Gamma^i_{[mt}\omega^t_{jkl]} + L^t_{jk[l}\omega^i_{m]t}, \\
\Delta L^i_{jt[l}\Gamma^t_{m]k} &\cong -\Gamma^s_{jt}\Gamma^t_{[mk}\omega^i_{sl]} + \Gamma^i_{st}\Gamma^t_{[mk}\omega^s_{jl]} + \\
&\quad + \Gamma^i_{js}\Gamma^t_{[mk}\omega^s_{tl]} + \Gamma^t_{[mk}\omega^i_{jtl]} + L^i_{jt[l}\omega^t_{m]k}, \\
\Delta L^i_{kt[l}\Gamma^t_{m]j} &\cong -\Gamma^s_{kt}\Gamma^t_{[mj}\omega^i_{sl]} + \Gamma^i_{st}\Gamma^t_{[mj}\omega^s_{kl]} + \\
&\quad + \Gamma^i_{ks}\Gamma^t_{[mj}\omega^s_{tl]} + \Gamma^t_{[mj}\omega^i_{ktl]} + L^i_{kt[l}\omega^t_{m]j}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Применяя дифференциальный оператор Δ к обеим частям равенства (14_2), а также учитывая (15) и (16) с последовательным раскрытием альтернирования, симметрирования и приведением подобных слагаемых, получим:

$$\begin{aligned}
\Delta R^i_{jklm} &\cong -L^i_{jkt}\omega^t_{[lm]} - R^t_{klm}\omega^i_{jt} - R^t_{jlm}\omega^i_{tk} + R^i_{tlm}\omega^t_{jk} + \\
&\quad + (\Gamma^t_{k[l}\Gamma^i_{m]s} - \Gamma^t_{k[l}\Gamma^i_{sm]})\omega^s_{(jt)} - \omega^i_{jk[lm]}.
\end{aligned} \tag{17}$$

В случае полуголономного гладкого многообразия дифференциальные сравнения (17) для компонент объекта кривизны R^i_{jklm} аффинной связности примут вид

$$\begin{aligned}
\Delta R^i_{jklm} &\cong -R^t_{klm}\omega^i_{jt} - R^t_{jlm}\omega^i_{tk} + R^i_{tlm}\omega^t_{jk} + \\
&\quad + 2(\Gamma^t_{k[l}\Gamma^i_{m]s} - \Gamma^t_{k[l}\Gamma^i_{sm]})\omega^s_{jt}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Теорема. *Аффинная связность 2-го порядка задается в расслоении реперов 2-го порядка со структурными уравнениями (1, 2, 7) с помощью поля объекта* $L = (\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl})$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5, 13). Объект* L *определяет формы аффинной связности 2-го порядка* $\Omega^i_j, \Omega^i_{jk}$ *(3, 11), удовлетворяющие структурным уравнениям* (6_1, 14_1), *в которые входят компоненты объекта кривизны* $R = (R^i_{jkl}, R^i_{jklm})$. *Компоненты* R^i_{jklm} *выра-*

жаются по формулам (14$_2$). Если гладкое многообразие M_n *является неголономным многообразием, то компоненты* R^i_{jklm} *удовлетворяют дифференциальным сравнениям (17), то есть образуют квазитензор лишь в совокупности с объектом связности* Γ^i_{jk} *и тензором* R^i_{jkl}. *В случае полуголономного гладкого многообразия* M^S_n, *когда* $\omega^t_{[lm]} \cong 0, \omega^i_{jk[lm]} \cong 0$, *дифференциальные сравнения (17) принимают вид (18). Для особого многообразия* $\overline{M}^S_n$, *когда* $\omega^i_{jk} \cong 0$, *компоненты* R^i_{jklm} *самостоятельно образуют тензор.*

Замечание 4. Дифференциальные сравнения (18) сохраняются в случае голономного гладкого многообразия M^H_n [3]. Об этом фактически упоминается в работе [2], где говорится о квазитензоре кривизны 2-го порядка, однако аналитическое обоснование отсутствует. В настоящей статье приведены соответствующие дифференциальные сравнения не только в случае голономного многообразия, но и для полуголономного и неголономного гладких многообразий.

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.
2. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
4. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 117—127.
5. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Там же. 2015. Вып. 46. С. 168—177.

N. Ryazanov

Differential comparisons for components of curvature of the second order affine connection in non-symmetrical case

Differential comparisons for the components of the curvature object of affine connection of the second order in the case of non-symmetric connection object are obtained. These comparisons show that in the general case the second order curvature object forms a geometric object only with the first order curvature object and the second order connection object.

Key words: structure equations of Laptev; affine connection; the second order curvature object; holonomic, semi-holonomic and non-holonomic smooth manifolds.

УДК 514.76, 501

К. В. Семенов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ksemen@mech.math.msu.su

Условия существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений третьего порядка с одной пространственной переменной

Изучаются уравнения в частных производных третьего порядка эволюционного типа с одной пространственной переменной и ассоциированные с ними дифференциально-геометрические структуры. Преобразованиям и отображениям Бэклунда дается инвариантная геометрическая интерпретация. Указаны условия, кото-