УДК 514.7

***А. И. Долгарев***

*(Пензенский государственный университет)*

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА С РАСТРАНОМ

Исследуется одуль Ли линейных преобразований одулярного пространства с растраном. Установлено, что он является прямой суммой двух растранов.

Растран является одулем Ли на основной аффинной группе, состоящей из параллельных переносов и гомотетий аффинного пространства. В аксиоматике Г. Вейля определено ЛМ-пространство — одулярное пространство с растраном. В [1] описан одуль Ли преобразований ЛМ-пространства, аналогичных аффинным преобразованиям аффинного пространства. Ниже изучается одуль Ли другого аналога аффинных преобразований. Определения основных понятий в геометрии ЛМ-пространства можно найти в [1]. Изучается ЛМ-пространство в [2].

Рассматривается 3-мерный растран, который может быть задан следующими операциями на многообразии $\mathbf{R}^3$:

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + y, yu + v, zu + w), \ x > 0, y > 0;$$

$$t(x, y, z) = (x^t, y\frac{x^t - 1}{x - 1}, z\frac{x^t - 1}{x - 1}); \ t(1, y, z) = (1, yt, zt), \ t \in \mathbf{R}.$$

Аффинное преобразование аффинной плоскости является преобразованием, в котором всякая прямая плоскости отображается на прямую; различные прямые отображаются на различные прямые. Такие преобразования называются коллинеациями. Аффинное преобразование можно определить в координатной форме. Пусть на аффинной плоскости заданы два репера **I** и **II** и произвольная точка $M$ в репере **I** имеет координаты $(x, y)$, т. е. $M = (x, y)_I$. Существует точка $M'$ плоскости, которая имеет координаты $(x, y)$ в репере **II**: $M' = (x, y)_{II}$. Преобразование плоскости, в котором точка *M*, имеющая координаты $(x, y)$ в репере **I**, отображается на точку $M'$, имеющую координаты $(x, y)$ в репере **II**, называется аффинным. Такое преобразование плоскости называется ее координатацией. Всякая координатация аффинной плоскости является ее коллинеацией, и коллинеация является координатацией.

Коллинеации и координатации ЛМ-плоскости не совпадают. Если в преобразовании ЛМ-плоскости точка $(x, y)$ отображается на точку $(x', y')$, то, по [3], ЛМ-преобразования ЛМ-плоскости (аналог коллинеаций, они изучаются в [1]) описываются формулами $x' = x + c$, $y' = pe^x + ay + d$, $a \neq 0$. Формулы координатаций ЛМ-плоскости таковы:

$$x' = kx + c,\ y' = pe^{kx} + ay + d,\ k \neq 0, a \neq 0. \tag{1}$$

Замена координат $x' = kx, y' = y$ соответствует координатации ЛМ-плоскости. При $p = 0$ имеем преобразования, задаваемые линейными формулами $x' = x + c$, $y' = ay + d$; $x' = kx + c$, $y' = ay + d$. Уравнение прямой линии на ЛМ-плоскости таково: $y = re^x + q$. Координатация $x = kx' + c$, $y = ay' + d$ отображает прямую на линию

$$y' = \frac{r}{a}e^{kx'} + \frac{q-d}{a}.$$

При $k \neq 1$ это не прямая.

Вместе с координатацией (1) рассмотрим координатацию

$$x' = mx + g,\ y' = qe^{mx} + by + h,\ m \neq 0, b \neq 0.$$

Композиция координатаций описывается формулами

$$x' = mx + mc + g\,,\ \ y' = qe^{mkx+mc} + bpe^{kx} + bay + bd + h\,.$$

Вид этих формул отличен от вида формул (1) координации. Здесь наряду с выражением $e^{mkx}$ содержится лишнее слагаемое $e^{kx}$.

Далее рассматриваем линейные координации 3-мерного ЛМ-пространства. Координаты точки записываем в виде $(x, x^1, x^2)$. Формулы координации $\kappa$ таковы:

$$\kappa : \begin{cases} x' = kx + c, \\ x'^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + d^1, \\ x'^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + d^2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x' = kx + c, \\ X' = AX + D; \end{cases}$$

где $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$, $A = (a^i_j)$, $\det A \neq 0$, $D = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix}$.

**Теорема.** *Линейные координации 3-мерного ЛМ-пространства, не изменяющие его ориентации, составляют одуль Ли преобразований, являющийся прямой суммой растрана аффинных преобразований прямой и растрана аффинных преобразований аффинной плоскости.*

\# Зададим еще одну линейную координацию:

$$\mu : \begin{cases} x'' = mx' + g, \\ X'' = BX' + H; \end{cases} \quad X'' = \begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix}, B = (b^j_l),\ \det B \neq 0,\ H = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}.$$

Композиция $\kappa\mu$ является линейной координацией:

$$\kappa\mu : \begin{cases} x'' = mkx + mc + g, \\ X'' = BAX + BD + H. \end{cases}$$

Координациям сопоставим матрицы

$$\kappa \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & k & 0 \\ D & 0 & A \end{pmatrix},\ \mu \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & m & 0 \\ H & 0 & B \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц $\kappa\mu$ является матрицей композиции координаций

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & k & 0 \\ D & 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & m & 0 \\ H & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g+cm & mk & 0 \\ H+BD & 0 & BA \end{pmatrix}.$$

Множество линейных координаций ЛМ-пространства относительно композиции преобразований является группой Ли.

Координациям $\kappa, \mu, \kappa\mu$ сопоставим кортежи

$$(c, D, k, A),\ (g, H, m, B),\ (g+cm, H+BD, mk, BA).$$

На множестве кортежей определим операцию

$$(g, H, m, B) + (c, D, k, A) = (g+cm, H+BD, mk, BA). \qquad (2)$$

Тем самым получена группа Ли кортежей, изоморфная группе Ли линейных координаций ЛМ-пространства. Каждую из этих групп Ли обозначим одним и тем же символом $K_L$. Координация $\kappa$ не изменяет ориентации ЛМ-пространства только при $k > 0, \det A > 0$. Группу Ли координаций, не изменяющих ориентации ЛМ-пространства, обозначим $K_L^+$. На группе $K_L^+$ кортежей зададим внешнюю операцию умножения на действительные числа:

$$t(c, D, k, A) = (c\frac{k^t - 1}{k-1}, D\frac{A^t - E}{A-E}, k^t, A^t),\ k \neq 1, t \in R; \qquad (3)$$

$$t(c, D, 1, A) = (ct, D\frac{A^t - E}{A-E}, 1, A^t),\ t \in \mathbf{R};$$

кортежу $t(c, D, k, A)$ соответствует координация $t\kappa$ ЛМ-пространства, не изменяющая его ориентации; $E$ — единичная матрица. Имеем одуль Ли $\mathrm{K}_L^+$ координаций ЛМ-пространства и изоморфный ему одуль Ли кортежей $\mathrm{K}_L^+$. Степени $A^t$ неособых квадратных матриц $A$ второго порядка приведены в [1]. Матрица $A$ может иметь 0, 1, 2 собственных значений, она эквивалентна одной из матриц (соответственно):

$$r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix},\ r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix};$$

их действительные степени таковы:

$$r^t\begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix},\ r^t\begin{pmatrix} cht\varphi & sht\varphi \\ sht\varphi & cht\varphi \end{pmatrix},\ r^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\varphi & 1 \end{pmatrix};$$

если $M = U^{-1}AU$, то $M^t = U^{-1}A^tU$.

Выделяем кортежи видов $(c,\ 0,\ k,\ E)$ и $(0,\ D, 1,\ A)$. Кортежи каждого из рассматриваемых видов составляют пододуль Ли в $\mathrm{K}_L^+$. По виду операций первый из них есть растран $\mathbf{P}^2$ аффинных преобразований прямой; второй — растран $\mathbf{P}^6$ аффинных преобразований аффинной плоскости (размерность 6 складывается из 6 параметров в формулах аффинных преобразований аффинной плоскости). Кроме того,

$$(c,\ 0,\ k,\ E) + (0,\ D, 1,\ A) = (0,\ D, 1,\ A) + (c,\ 0,\ k,\ E) = (c,\ D,\ k,\ A),$$

следовательно, имеется прямая сумма растранов

$$\mathrm{K}_L^+ = \mathbf{P}^2 + \mathbf{P}^6.\ \#$$

Одуль Ли $\mathrm{K}_L^+$ содержит пододуль Ли $\Lambda_L^+$ линейных коллинеаций ЛМ-пространства. Это пододуль, представленный кортежами $(c,\ D, 1,\ A)$. Кортежи $(c,\ 0, 1,\ A)$ составляют 1-мерное линейное пространство $\mathbf{L}^1$. Поэтому для одуля Ли $\Lambda_L^+$ линейных коллинеаций ЛМ-пространства справедливо разложение

$$\Lambda_L^+ = \mathbf{L}^1 + \mathbf{P}^6.$$

Оно является следствием доказанной выше теоремы. Противоречия с теоремой 3 из [1] здесь нет. Согласно теореме 3 [1], одуль Ли $\Lambda_\lambda$ ЛМ-преобразований (коллинеаций) является полупрямой суммой растрана и 1-мерного линейного пространства. Рассматривая только линейные коллинеации, получаем прямую сумму одулей Ли.

Заметим, что линейные координации могут быть представлены следующими матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ 0 & 0 & d^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки матриц соответствуют растам из $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{P}^6$, и вид матриц говорит о перестановочности растранов как пододулей одуля Ли $K_L^+$.

### *Список литературы*

1. *Долгарев А. И.* Аналог аффинных преобразований одулярного пространства с растраном // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. №37. С. 38—44.

2. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005.

A. Dolgarev

## TRANSFORMATIONS OF ODUL SPACE WITH RASTRAN

The Lie odule of linear transformations of odul space with rastran is explored. It is established, that it is the direct sum of two rastrans.