S. Malakhovsky

DIOPHANTINE FAMILIES OF PIFAGOR TRIANGLES

We consider subsets of right-angled triangles with integer length of sides – Pifagor's triangles, having same hypotenuse. Such subsets are called Diophantine ones. It is proved, that Diophantine family with hypotenuse $m_n=p_1p_2...p_n$, where p_i – consecutive prime number of the kind 4k+1 ($k\in N$), consists of $\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1}C_n^h$ Pifagor's triangles. The method for finding of the families is indicated and N.V. Malakhovsky computer program is given.

УДК 514.75

Н.В. Малаховский

(*Калининградский государственный университет)*

СЕМЕЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПОНСЕЛЕ

На комплексной плоскости *C* рассматривается двухпараметрическое семейство Π_2 треугольников с заданными радиусами *R* и *r* ($R>r$) описанной и вписанной окружностей и центром *O* описанной окружности. Центры L_0 вписанных окружностей этого семейства располагаются, в силу формулы Эйлера

$$d^2=R^2-2Rr, \tag{1}$$

на окружности (O,d). Фиксацией центра $I_0 \in(O,d)$ выделяется однопараметрическое подсемейство $\Pi_1\subset\Pi_2$, называемое семейством Понселе. Каждый треугольник этого семейства имеет описанную окружность (O,R) и вписанную окружность $(I_0,r), OI_0=d$. Известно, что задание треугольника *ABC* порождает ряд инвариантных точек и линий в плоскости этого треугольника. В работе установлены связи между ними, когда треугольник *ABC* описывает семейство Понселе, и дана геометрическая характеристика полученных зависимостей.

Примем окружность (O,R) за единичную $|z|=1$ и обозначим через a^2,b^2,c^2 комплексные координаты вершин произвольного треугольника *ABC* семейства Понселе. Тогда координата центра I_0 его вписанной окружности примет вид:

. $$-\sigma_2= -ab-bc-ca. \qquad (2)$$

Фиксируя $\sigma_2(\sigma_2 =const)$ и полагая $\sigma_2=\overline{\sigma}_2$ $(\sigma_2<1)$, получим выражение для её радиуса

$$R=1/2(1-\sigma_2^2) \qquad (3)$$

Имеем

$$\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}\right)^2=\left(\overline{ab}\right)^2+\left(\overline{bc}\right)^2+\left(\overline{ca}\right)^2+2\overline{abc}^{\,2}+2\overline{bca}^{\,2}+2\overline{cab}^{\,2}=\sigma_2^2. \qquad (4)$$

Умножив обе части второго равенства в (4) на

$$a^2b^2c^2=e^{i\varphi}, \qquad (5)$$

и учитывая (3), получим

$$. \; a^2+b^2+c^2= \sigma_2\,(\sigma_2\, e^{i\varphi}-2).$$

Умножая обе части уравнения, сопряжённого к (6), на $a^2b^2c^2=e^{i\varphi}$, получим

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2= \sigma_2\,(\sigma_2-2\,e^{i\varphi}). \qquad (7)$$

Из (5), (6) и (7) следует, что

$$e^{i\varphi}=\frac{a^2(a^2+\sigma_2)^2}{(1+\sigma_2a^2)^2}. \qquad (8)$$

Теорема 1. *Если неравносторонний треугольник ABC описывает семейство Понселе, то центр F окружности Эйлера, точка пересечения высотH, центр тяжести M и точка Нагеля N этого треугольника описывают окружности с равными угловыми скоростями, причём точки O,F,H,M лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера этого треугольника.*

Доказательство. Точки F,H,M,N имеют относительно треугольника ABC комплексные координаты

$$f=\frac{1}{2}\left(\sigma_2(\sigma_2e^{i\varphi}-2)\right),\; h=\sigma_2(\sigma_2e^{i\varphi}-2),\; m=\frac{1}{3}\left(\sigma_2(\sigma_2e^{i\varphi}-2)\right),\; n=\sigma_1^2 \qquad (9)$$

и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$|z+\sigma_2|=\frac{1}{2}\sigma_2^2,\; |z+2\sigma_2|=\sigma_2^2,\; \left|z+\frac{2}{3}\sigma_2\right|=\frac{1}{3}\sigma_2^2,\; |z|=\sigma_2^2, \qquad (10)$$

которые являются уравнениями окружностей с фиксированными центрами и радиусами. Из (9) следует, что векторы $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, а точки O, N, H, $E(-2\sigma_2)$ являются вершинами параллелограмма с центром в точке F. Из равенств

$$\arg\left(f+\sigma_2\right)=\arg\left(h+2\sigma_2\right)=\arg\left(m+\frac{2}{3}\sigma_2\right)=\arg n=2\arg(a+b+c) \tag{11}$$

следует, что точки *F,H,M,N* описывают соответствующие окружности (10) с равными угловыми скоростями. Заметим, что центры $I_1(\sigma_2-2bc)$, $I_2(\sigma_2-2ca)$,, $I_3(\sigma_2-2ab)$ (вневписанных окружностей треугольника *ABC* описывают окружность $|z-\sigma_2|=2$ с центром в точке с комплексной координатой σ_2 и радиусом 2.

Теорема 2. *Прямые Симсона–Валлиса точки P семейства неравносторонних треугольников Понселе определяют пучок прямых, центр которого описывает эллипс, когда точка* P *описывает окружность* $|z|=1$.

Доказательство. Уравнение прямой Симсона–Валлиса точки *P* треугольника *ABC*, вписанного в окружность $|z|=1$, имеет вид:

$$z-e^{i\varphi}\overline{p}\overline{z}-\frac{1}{2}(p-(\sigma_2^2-2\sigma_2e^{i\varphi})\overline{p}-e^{i\varphi}\overline{p}^2+\sigma_2^2e^{i\varphi}-2\sigma_2)=0\,. \tag{12}$$

Заметим, что точка *Q* с комплексной координатой

$$q=\frac{1}{2}(p-\sigma_2^2\overline{p}-2\sigma_2) \tag{13}$$

удовлетворяет уравнению (12) и в то же время не зависит от треугольника *ABC*. Следовательно, эта точка *Q* является центром пучка прямых Симсона–Валлиса фиксированной точки *P* семейства треугольников Понселе. Если точка *P* описывает окружность $|z|=1$, то точка *Q* описывает эллипс

$$z+\frac{1}{2}\left(\sigma_2^2\overline{p}-p+2\sigma_2\right)=0 \tag{14}$$

с центром в точке $-\sigma_2$. Действительно, перенося начало координат на вектор $-\sigma_2$ и учитывая, что $p=\cos\varnothing+i\cdot\sin\varnothing$, $\sigma_2^2=1-2r$, запишем уравнение (14) в параметрической форме

$$x=r\cos\varnothing,\ y=(1-r)\sin\varnothing,\ \varnothing\in[0,2\pi], \tag{15}$$

уравнения (15) определяют эллипс с полуосями r и $1-r$, касающийся вписанной в треугольник *ABC* окружности. Каждый невырожденный треугольник порождает единственную кривую четвёртого порядка, касающуюся сторон и продолжений высот треугольника и называемую гипоциклоидой Штейнера. Её центр совпадает с центром окружности Эйлера этого треугольника. Гипоциклоида Штейнера является огибающей прямых Симсона–Валлиса точек описанной окружности треугольника.

Теорема 3. *Если неравносторонний треугольник описывает семейство Понселе, то центр F гипоциклоиды Штейнера описывает окружность* ω, *концентричную вписанной в треугольник окружности, с угловой скоро-*

стью в три раза большей угловой скорости вращения гипоциклоиды вокруг своего центра. В свою очередь, гипоциклоида Штейнера касается эллипса в трёх точках. Вершины гипоциклоиды описывают нефроиду, в то время как касательные в трёх её точках возврата имеют своей огибающей астроиду, описанную около окружности ω.

Доказательство. Решая систему, первое уравнение которой определяет прямую Симсона–Валлиса, а второе является его частной производной по параметру p, получим уравнение огибающей прямых Симсона–Валлиса точки P относительно треугольника ABC в виде

$$z-\frac{1}{2}\left(\sigma_2^2 e^{i\varphi}-2\sigma_2+e^{i\varphi}\overline{p}^2+2p\right)=0\,. \tag{16}$$

Уравнение (16) определяет гипоциклоиду Штейнера треугольника ABC. Дифференцируя уравнение (16) по параметру p, найдём критические точки функции (16)

$$p_0=e^{i\varphi},\ p_1=e^{i(\varphi+\frac{2}{3}\pi)},\ p_2=e^{i(\varphi+\frac{4}{3}\pi)} \tag{17}$$

которые являются точками Бутена треугольника ABC и которые определяют вершины гипоциклоиды (16)

$$\mathrm{f}_{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(\sigma_2^2\ e^{i\varphi}-2\sigma_2+3p_j),\ j=0,1,2. \tag{18}$$

Точка F с комплексной координатой

$$\mathrm{f}_{\mathrm{i}}=\boxed{}-2\sigma_2\,) \tag{19}$$

равноудалена от вершин гипоциклоиды (16) и поэтому является её центром. Координата центра гипоциклоиды (16) удовлетворяет уравнению окружности Эйлера. Следовательно, если треугольник ABC описывает семейство Понселе, центр гипоциклоиды Штейнера описывает окружность Эйлера, концентричную окружности, вписанной в треугольник ABC. Имеем

$$arg(f+\sigma_2)=\frac{arg(f_k-f)+2\pi k}{3},\ k=0,1,2, \tag{20}$$

где $k=0$ отвечает повороту вершины z_0, $k=1$ – вершины z_1, а $k=2$ – вершины z_2. Следовательно, гипоциклоида Штейнера, совершая планетообразное движение, вращается в три раза медленнее вокруг своего центра, в то время как последний описывает окружность с центром в неподвижной точке. Решая систему, первое уравнение которой определяет прямую Симсона–Валлиса, а второе является его частной производной по параметру a^2, получим уравнение огибающей гипоциклоид Штейнера, совпадающее с уравнением (15) эллипса. Вершины гипоциклоиды (16) описывают нефроиду с центром в точке σ_2

$$z+\sigma_2-\frac{1}{2}\left[\sigma_2^2 e^{i\varphi}+3e^{\frac{i\varphi}{3}}\right]=0 \tag{21}$$

Уравнения касательных в точках возврата гипоциклоиды (16) являются прямыми Симсона–Валлиса точек Бутена треугольника *ABC*. Решая систему уравнений, первое уравнение которой определяет касательную в одной из точек возврата гипоциклоиды, а второе является его частной производной по параметру a^2, получим уравнение огибающей касательных в точках возврата гипоциклоиды в виде:

$$z+\sigma_2+\frac{1}{4}\sigma_2^2(e^{i\varphi}+3e^{-\frac{i\varphi}{3}})=0\,. \tag{22}$$

Уравнение (22) определяет астроиду с центром в точке $-\sigma_2$. Та же кривая является огибающей касательных в остальных вершинах гипоциклоиды. Так как радиус неподвижного круга равен σ_2^2, а диаметр подвижного $\frac{1}{2}\sigma_2^2$, то астроида касается окружности Эйлера. Интересно отметить, что основания высот неравностороннего треугольника, описывающего семейство Понселе, описывают улитку Паскаля, являющуюся конхоидой окружности с диаметром $|\sigma_2|$.

Список литературы

1. *Ungethüm E.*. Ponceletsche Dreiecksscharen // Elemente der Mathematik. 1985. S. 109-119.
2. *Малаховский Н.В.* Метод комплексных чисел в планиметрии. Калининград, 1996.

V. Malakhovsky

FAMILY OF PONSELE'S TRIANGLES

The setting of triangle generates row of invariant points and lines in the triangle plane. Connections between them are determined, when the triangle describes Ponsele's family. Geometric characteristic of obtained dependences is given.

УДК 514.76