УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ВВЕДЕНИЕ СВЯЗНОСТЕЙ НА $\mathcal{H}$- РАСПРЕДЕЛЕНИИ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается гиперполосное $\mathcal{H}$-распределение в n-мерном аффинном пространстве A_n — пара распределений прямых L и гиперплоскостей H_{n-1} с отношением инцидентности образующих их элементов в каждом центре A следующего вида: $A \in L(A) \subset H_{n-1}(A)$. Дано задание гиперполосного $\mathcal{H}$-распределения в n-мерном аффинном пространстве A_n и приведена теорема существования. Следуя работе [1], устанавливается соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Построена нормализация Тренсона $\mathcal{H}$-распределения. Рассмотрено задание нормальных и аффинных связностей на оснащенном $\mathcal{H}$-распределении. Для H-, L-, Λ-распределений введены пары $\{\gamma, \overset{\perp}{\gamma}\}$, $\{\eta, \overset{\perp}{\eta}\}$, $\{\vartheta, \vartheta^{\perp}\}$ внутренних касательных и нормальных связностей, построены их тензоры кривизны.

Ключевые слова: гиперполоса, форма, аффинное пространство, двойственный образ, связность.

Во всей работе приняты следующие терминология и обозначения.

а) Все исследования, проведенные в работе, носят локальный характер. Изучаемые многообразия предполагают достаточное число раз дифференцируемыми.

б) Схема использования индексов такова:

$$I,J,K,L,\ldots=1,2,\ldots,n;\ \alpha,\beta,\gamma,\ldots=2,\ldots,n-1;$$

$$i,j,k,l,\ldots=1,2,\ldots,n\text{-}1;\ a,b,\ldots=(\alpha;n);\ \xi,\eta,\ldots=(1;n).$$

в) При фиксировании главных параметров ($\omega^K=0$) формы ω_J^K будем обозначать через π_J^K и оператор дифференцирования ∇ через δ.

г) Оператор ∇ действует по закону:

$$\nabla T_{i\alpha n}^{j\beta}=dT_{i\alpha n}^{j\beta}-T_{k\alpha n}^{j\beta}\omega_i^k-T_{i\gamma n}^{j\beta}\omega_\alpha^\gamma-T_{i\alpha n}^{j\beta}\omega_n^n+T_{i\alpha n}^{k\beta}\omega_k^j+T_{i\alpha n}^{j\gamma}\omega_\gamma^\beta .$$

§1. Задание гиперполосного распределения в аффинном пространстве

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, и пусть в каждой его точке A задана гиперплоскость H(A), то есть задано H-распределение. Пусть через центр A H-распределения проходит прямая L(A) такая, что $A\in L(A)\subset H(A)$.

Таким образом, мы рассматриваем в аффинном пространстве H(L)-распределение, в котором L-распределение мы назовем базисным, а H-распределение оснащающим. В дальнейшем H(L)-распределение кратко будем называть $\mathcal{H}$-распределением [2]. Присоединим к образующему элементу $\mathcal{H}$-распределения аффинный репер $R=\{M,\vec{e}_J\}$ следующим образом: поместим вершину M репера R в точку A (в центр $\mathcal{H}$-распределения), то есть $M\equiv A$, вектор $\vec{e}_1$ выберем параллельно прямой L, векторы $\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_{n-1}$ поместим в гиперплоскость H(A), вектор $\vec{e}_n(A)\notin H(A)$ принимает произвольное положение вне гиперплоскости H(A) так, что вместе с векторами $\vec{e}_i$ образует репер всего пространства A_n.

Уравнения инфинитезимальных перемещений точечного репера пространства A_n запишутся следующим образом:

$$dA=\omega^J\vec{e}_J,\quad d\vec{e}_1=\omega_1^1\vec{e}_1+\omega_1^\alpha\vec{e}_\alpha+\omega_1^n\vec{e}_n,$$

$$d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^1\vec{e}_1+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta+\omega_\alpha^n\vec{e}_n,\quad d\vec{e}_n=\omega_n^1\vec{e}_1+\omega_n^\alpha\vec{e}_\alpha+\omega_n^n\vec{e}_n.$$

При смещении вдоль кривых, принадлежащих L-распределению, в каждом центре A распределения в гиперплоскости H(A) возникает характеристика $\Lambda_{n-2}(A)$ [2]. Поместим векторы $\vec{e}_2,...,\vec{e}_{n-1}$ в характеристику $\Lambda_{n-2}(A)$.

При фиксации точки A характеристика $\Lambda_{n-2}(A)$, прямая L(A) и гиперплоскость H(A) неподвижны, поэтому

$$\delta\vec{A}=0,\ \ \delta\vec{e}_1=\pi_1^1\,\vec{e}_1,\ \ \delta\vec{e}_\alpha=\pi_\alpha^\beta\,\vec{e}_\beta,$$
$$\delta\vec{e}_n=\pi_n^1\,\vec{e}_1+\pi_n^\alpha\,\vec{e}_\alpha+\pi_n^n\,\vec{e}_n.$$

Отсюда следует, что уравнения: $\pi^J=0,\ \pi_1^\alpha=0,\ \pi_1^n=0,$ $\pi_\alpha^1=0,\ \pi_\alpha^n=0$ являются уравнениями стационарной подгруппы G_0 образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения.

Из уравнений стационарной подгруппы G_0 следует, что формы $\omega^J,\ \omega_\alpha^n,\ \omega_1^\alpha,\ \omega_\alpha^1,\ \omega_1^n$ являются главными формами $\mathcal{H}$-распределения. Примем формы ω^J за базисные (так как они определяют инфинитезимальное перемещение образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения) и запишем разложение остальных главных форм по базисным:

$$\begin{aligned}&\omega_1^n=\Lambda_{1K}^n\,\omega^K,\quad \omega_1^\alpha=\Lambda_{1K}^\alpha\,\omega^K,\\&\omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha K}^n\,\omega^K,\quad \omega_\alpha^1=\Lambda_{\alpha K}^1\,\omega^K.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Дифференцируя уравнения (1.1) внешним образом, получим:

$$\begin{aligned}&\nabla\Lambda_{1K}^n=\Lambda_{1KL}^n\omega^L,\quad \nabla\Lambda_{1K}^\alpha+\Lambda_{1K}^n\omega_n^\alpha=\Lambda_{1KL}^\alpha\omega^L,\\&\nabla\Lambda_{\alpha K}^n=\Lambda_{\alpha KL}^n\omega^L,\quad \nabla\Lambda_{\alpha K}^1+\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^1=\Lambda_{\alpha KL}^1\omega^L.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Отметим, что $\{\vec{e}_\alpha\}\subset\Lambda_{n-2}$, поэтому функции $\{\Lambda_{\alpha K}^l\}$ принадлежат окрестности 2-го порядка [2; 3]. Значит, $\Gamma_1=\left\{\Lambda_{1K}^n,\Lambda_{1K}^\alpha,\Lambda_{\alpha K}^n\right\},\ \ \Gamma_2=\left\{\Gamma,\ \Lambda_{1KL}^n,\ \Lambda_{1KL}^\alpha,\ \Lambda_{\alpha KL}^n,\ \Lambda_{\alpha K}^1\right\}$ — фундаментальные геометрические объекты соответственно первого и второго порядка $\mathcal{H}$-распределения.

Имеет место теорема существования [4] гиперполосного $\mathcal{H}$-распределения:

Теорема 1. *В n-мерном аффинном пространстве гиперполосное $\mathcal{H}$-распределение существует с произволом 3n–5 функций n аргументов.*

§2. Нормализация Тренсона

Введем некоторое соответствие между нормалями 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения и *(n–2)*-мерными плоскостями, лежащими в плоскости H(A) и не проходящими через центр *A* $\mathcal{H}$-распределения. Эти плоскости будем называть *нормалями 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения.*

Пусть $\{ \nu_n^i \}$ — объект, определяющий произвольную инвариантную нормаль 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения и удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega^K . \tag{2.1}$$

Введем величины $\Lambda_{iK}^n = \{ \Lambda_{1K}^n, \quad \Lambda_{\alpha K}^n \}$, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijL}^n \omega^L , \quad \nabla \Lambda_{in}^n - \Lambda_{i1}^n \omega_n^1 - \Lambda_{i\alpha}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{inL}^n \omega^L . \tag{2.2}$$

Введем обозначение $\Lambda_{in}^n \overset{def}{=} t_i$. Поле тензора $\{ \nu_i \}$, где

$$\nu_i = \Lambda_{ij}^n \nu_n^j + t_i , \quad \nabla \nu_i = \nu_{iK} \omega^K , \tag{2.3}$$

задает поле нормалей 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения.

Уравнения (2.3) решим относительно ν_n^j:

$$\nu_n^k = \Lambda_n^{ki} \nu_i + t_n^k , \tag{2.4}$$

где

$$\Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{ik} = \delta_j^k , \quad t_n^k = -\Lambda_n^{ki} t_i ,$$

$$\nabla \Lambda_n^{ij} = \Lambda_{nK}^{ij} \omega^K , \quad \nabla t_n^k + \omega_n^k = t_{nJ}^k \omega^J .$$

Таким образом, квазитензор $\{\nu_n^i\}$ однозначно определяет по формулам (2.3) соответствующий тензор $\{\nu_i\}$. И наоборот: задав тензор $\{\nu_i\}$, мы можем однозначно определить квазитензор $\{\nu_n^i\}$ по формулам (2.4). При помощи формул (2.3) и (2.4) устанавливается взаимно однозначное соответствие между нормалями 1-го и 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Это соответствие является для $\mathcal{H}$-распределения аналогом соответствия Бомпьяни — Пантази [1; 4]. Нормали N_1 и P_{n-2} 1-го и 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения, которые связаны соотношениями (2.3, 2.4), будем называть *соответствующими друг другу в биекции* Бомпьяни — Пантази.

Для невырожденных тензоров $\Lambda_{11}^n, \Lambda_{\alpha\beta}^n$ введем обратные им тензоры:

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{n} \, \Lambda_{n}^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}, \ \nabla\Lambda_{n}^{\alpha\beta} = \Lambda_{nK}^{\alpha\beta}\omega^K; \qquad (2.5)$$

$$\Lambda_{11}^{n} \, \Lambda_{n}^{11} = 1, \quad \nabla \Lambda_{n}^{11} = \Lambda_{nK}^{11}\omega^K. \qquad (2.6)$$

Из уравнений (1.2) найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции Λ_{111}^n и $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}^n$:

$$\nabla\Lambda_{111}^{n} - \Lambda_{11}^{n}\Lambda_{11}^{n}\omega_n^1 = \Lambda_{111K}^{n}\omega^K; \qquad (2.7)$$

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{n} - \Lambda_{(\alpha\beta}^{n} \, \Lambda_{\gamma)\xi}^{n} \, \omega_n^{\xi} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma K}^{n} \, \omega^K . \qquad (2.8)$$

Введем в рассмотрение функции [5]

$$T_n^1 = -\frac{1}{n}\Lambda_n^{11}\,\Lambda_{111}^n\,\Lambda_n^{11}, \ T_n^{\alpha} = -\frac{1}{n}\Lambda_n^{\xi\beta}\,\Lambda_{\xi\beta\gamma}^n\,\Lambda_n^{\gamma\alpha}, \qquad (2.9)$$

которые в силу уравнений (2.5—2.9) соответственно удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla T_n^1 + \omega_n^1 = T_{nK}^1\omega^K, \ \nabla T_n^{\alpha} + \omega_n^{\alpha} = T_{nK}^{\alpha}\omega^K. \qquad (2.10)$$

В силу уравнений (1.1, 1.2, 2.10) следует, что функции $\{T_n^i\} = \{T_n^{\alpha}, T_n^1\}$ удовлетворяют уравнениям:

$$T_n^i + \omega_n^i = T_{nK}^i\,\omega^K.$$

Следуя работе [5], вводим следующие определения.

Определение 1. *Нормалью Тренсона 1-го рода Λ-плоскости в точке A назовем 2-плоскость*

$$T_2 = [\, A, \vec{e}_1, \vec{e}_n + T_n^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \,] = [\, A, \vec{e}_1, \vec{T}_n \,].$$

Определение 2. *Нормалью Тренсона 1-го рода прямой L(A) назовем гиперплоскость*

$$T_{n-1} = [\, A, \vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_n + T_n^1 \vec{e}_1 \,] = [\, A, \vec{e}_{\alpha}, \vec{t}_n \,].$$

Определение 3. *Нормалью Тренсона 1-го рода гиперплоскости H(A) в точке A называется прямая пересечения нормалей Тренсона 1-го рода плоскостей Λ(A), L(A), т. е.* $T_1(A) = T_2(A) \cap T_{n-1}(A)$.

Рассмотрим биекцию Бомпьяни — Пантази (2.3) между нормалями 1-го и 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения [6]:

$$v_i = \Lambda_{ij}^n v_n^j + t_i, \quad \nabla v_i = v_{iK} \omega^K, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} t_{\alpha} &= \Lambda_{\beta\gamma\alpha}^{n} \Lambda_n^{\beta\gamma}, \quad \nabla t_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^{\beta} + t_{\alpha i} \omega^i, \\ t_1 &= \Lambda_{111}^n \Lambda_n^{11}, \quad \nabla t_1 = \Lambda_{11}^n \omega_n^1 + t_{1i} \omega^i, \\ t_i &= \{ t_{\alpha}, t_1 \}, \quad \nabla t_i = \Lambda_{ij}^n \omega_n^j + t_{iK} \omega^K. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12, 2.2, 2.3), находим соотношения

$$v_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}^n \; v_n^{\beta} + t_{\alpha}, \; \nabla v_{\alpha} = v_{\alpha K} \omega^K; \tag{2.13}$$

$$v_1 = \Lambda_{11}^n v_n^1 + t_1, \quad \nabla v_1 = v_{1K} \omega^K, \tag{2.14}$$

устанавливающие биекцию соответственно между нормалями 1-го и 2-го рода Λ-подрасслоений и L-подрасслоений.

Таким образом, используя биекции (2.11—2.14) нормалям 1-го $T_1(T_n^i)$, $T_2(T_n^{\alpha})$, $T_{n-1}(T_n^1)$ соответственно плоскостей H(*A*), Λ(*A*), L(*A*), в каждом центре *A* $\mathcal{H}$-распределения поставим в соответствие нормали 2-го рода этих плоскостей:

$$\mathcal{N}_{\text{n-1}}(\text{A}):\ T_i = \Lambda^n_{ij} T^j_n + t_i,\ \mathcal{N}_{\text{n-2}}(\text{A}):\ T_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta} T^\beta_n + t_\alpha,$$

$$\mathcal{N}_1(\text{A}):\ T_1 = \Lambda^n_{11} T^1_n + t_1.$$

В результате приходим к следующему предложению.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним образом присоединяются поля нормализаций соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений в смысле Нордена полями нормалей 1-го и 2-го рода Тренсона* (T_i, T^i_n), (T_α, T^α_n), (T_1, T^1_n).

§3. Задание нормальных и касательных аффинных связностей на оснащенном H-распределении

1. Адаптируем репер R_1 полю нормалей $N_1(A)$ 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, выбирая вектор $\vec{e}_n \| N_1(A)$. В этом случае

$$\omega^1_n = \lambda^1_{nK}\omega^K, \quad \omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_{nK}\omega^K,$$

$$\nabla\lambda^1_{nK} = \lambda^1_{nKL}\omega^L, \quad \nabla\lambda^\alpha_{nK} = \lambda^\alpha_{nKL}\omega^L. \qquad (3.1)$$

Таким образом, уравнения (1.1, 1.2, 3.1) задают оснащенное полем нормалей первого рода $N_1(A)$ гиперполосное $\mathcal{H}$-распределение. При фиксации точки $A \overset{def}{=} x$ (центра $\mathcal{H}$-распределения) плоскости $N_1(x)$, $N_{n-1}(x)$, $N_2(x)$ и $T_{n-1}(x)$, $T_1(x)$, $T_{n-2}(x)$ остаются неподвижными. Следовательно, $\mathcal{H}$-распределение индуцирует (порождает) нормальные $N_1(A_n)$, $N_{n-1}(A_n)$, $N_2(A_n)$ и касательные $T_{n-1}(A_n)$, $T_1(A_n)$, $T_{n-2}(A_n)$ подрасслоения [7].

Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-1}(A_n)$ в силу формул (1.1, 1.2, 3.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega^K_L, \quad d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,$$

$$d\omega^1_1 = \Omega^1_1, \quad d\omega^1_\alpha = \omega^i_\alpha \wedge \omega^1_i + \Omega^1_\alpha, \quad d\omega^\alpha_1 = \omega^i_1 \wedge \omega^\alpha_i + \Omega^\alpha_1,$$

где

$$\Omega^{\beta}_{\alpha}=\omega^{n}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{n}+\omega^{1}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{1}=(\Lambda^{n}_{\alpha[L}\lambda^{\beta}_{|n|K]}+\Lambda^{1}_{\alpha[L}\lambda^{\beta}_{|1|K]})\omega^{L}\wedge\omega^{K}=$$
$$=R^{\beta}_{\alpha LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K},$$
$$\Omega^{1}_{1}=(\Lambda^{\alpha}_{1[L}\Lambda^{1}_{|\alpha|K]}+\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{1}_{|n|K]})\omega^{L}\wedge\omega^{K}=R^{1}_{1LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K},$$
$$\Omega^{1}_{\alpha}=\Lambda^{n}_{\alpha[L}\lambda^{1}_{|n|K]}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K}=R^{1}_{\alpha LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K}; \qquad (3.2)$$
$$\Omega^{\alpha}_{1}=\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{\alpha}_{|n|K]}\omega^{L}\wedge\omega^{K}=R^{\alpha}_{1LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K},$$
$$R^{\beta}_{\alpha LK}=\Lambda^{n}_{\alpha[L}\lambda^{\beta}_{|n|K]}+\Lambda^{1}_{\alpha[L}\lambda^{\beta}_{|1|K]},\ R^{1}_{\alpha LK}=\Lambda^{n}_{\alpha[L}\lambda^{1}_{|n|K]}; \qquad (3.3)$$
$$R^{1}_{1LK}=\Lambda^{\alpha}_{1[L}\Lambda^{1}_{|\alpha|K]}+\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{1}_{|n|K]},\quad R^{\alpha}_{1LK}=\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{\alpha}_{|n|K]}. \qquad (3.4)$$

Следуя работам [6; 7], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^K,\omega^i_j\}$, которую назовем внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенного гиперполосного $\mathcal{H}$-распределения.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение (полем нормалей 1-го рода $N_1(x)$) индуцирует внутреннюю связность γ в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ с формами связности $\{\omega^K,\omega^i_j\}$ и 2-формами кривизны (3.2). Компоненты тензора кривизны $R^i_{jLK}=\{R^1_{1LK},R^1_{\alpha LK},R^{\alpha}_{1LK},R^{\beta}_{\alpha LK}\}$ связности γ имеют строение (3.3—3.4).*

2. Структурные уравнения нормального расслоения $N_1(A_n)$ с учетом уравнений (1.1, 1.2, 3.1) можно представить в виде:

$$d\omega^n_n=\Omega^n_n,$$

где

$$\begin{aligned}\Omega^n_n&=\omega^1_n\wedge\omega^n_1+\omega^{\alpha}_n\wedge\omega^n_{\alpha}=\\&=(\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]}+\lambda^{\alpha}_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]})\omega^L\wedge\omega^K=R^n_{nLK}\,\omega^L\wedge\omega^K;\end{aligned} \qquad (3.5)$$

$$R^n_{nLK}=\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]}+\lambda^{\alpha}_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]}. \qquad (3.6)$$

Согласно работе [7] получаем, что в нормальном расслоении $N_1(A_n)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^{\perp}$ с формами связности $\{\omega_n^n\}$ и 2-формами кривизны (3.5), которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенного гиперполосного $\mathcal{H}$-распределения.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение индуцирует в расслоении $N_1(A_n)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\gamma^{\perp}$ с формами связности $\{\omega_n^n\}$ и 2-формами кривизны (3.5). Компоненты тензора кривизны R^n_{nLK} связности $\gamma^{\perp}$ имеют строение (3.6).*

3. Аналогично можно построить нормальную аффинную связность $\eta^{\perp}$ в расслоении $N_{n-1}(A_n)$ нормалей 1-го рода базисного L-подрасслоения данного $\mathcal{H}$-распределения. Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-1}(A_n)$ имеют следующее строение:

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,$$

$$d\omega^n_\alpha = \omega^n_\alpha \wedge \omega^n_n + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^n_\beta + \omega^1_\alpha \wedge \omega^n_1 = \omega^a_\alpha \wedge \omega^n_a + \Omega^n_\alpha,$$

$$d\omega^\alpha_n = \omega^a_n \wedge \omega^\alpha_a + \Omega^\alpha_n, \quad d\omega^n_n = \Omega^n_n,$$

где

$$\begin{aligned}
&\Omega^\beta_\alpha = \omega^n_\alpha \wedge \omega^\beta_n + \omega^1_\alpha \wedge \omega^\beta_1 = \\
&= (\Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]})\omega^L \wedge \omega^K = R^\beta_{\alpha LK}\,\omega^L \wedge \omega^K, \\
&\qquad \Omega^\alpha_n = \lambda^1_{n[L}\Lambda^\alpha_{|1|K]}\,\omega^L \wedge \omega^K = R^\alpha_{nLK}\,\omega^L \wedge \omega^K, \\
&\qquad \Omega^n_\alpha = \lambda^1_{\alpha[L}\Lambda^n_{|1|K]}\,\omega^L \wedge \omega^K = R^n_{\alpha LK}\,\omega^L \wedge \omega^K;
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega^n_n = \omega^1_n \wedge \omega^n_1 + \omega^\alpha_n \wedge \omega^n_\alpha = \\
&= (\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]} + \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]})\omega^L \wedge \omega^K = R^n_{nLK}\,\omega^L \wedge \omega^K, \\
&R^\beta_{\alpha LK} = \Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]}, \quad R^\alpha_{nLK} = \lambda^1_{n[L}\Lambda^\alpha_{|1|K]};
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$R^{n}_{\alpha LK}=\lambda^{1}_{\alpha[L}\Lambda^{n}_{|1|K]},\ R^{n}_{nLK}=\lambda^{1}_{n[L}\Lambda^{n}_{|1|K]}+\lambda^{\alpha}_{n[L}\Lambda^{n}_{|\alpha|K]}. \quad (3.9)$$

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение индуцирует в расслоении $N_{n-1}(A_n)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\eta^{\perp}$ с формами связности $\{\omega^{a}_{b}\}$ и 2-формами кривизны (3.7). Компоненты тензора кривизны R^{a}_{bLK} связности $\eta^{\perp}$ имеют строение (3.8, 3.9).*

Связность $\eta^{\perp}$ будем называть в дальнейшем нормальной центроаффинной связностью L-подрасслоения.

4. Структурные уравнения соответствующего касательного расслоения $T_1(A_n)$ в силу формул (1.1, — 1.2, 3.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^{K}=\omega^{L}\wedge\omega^{K}_{L},\ d\omega^{1}_{1}=\Omega^{1}_{1},$$

где:

$$\Omega^{1}_{1}=(\Lambda^{\alpha}_{1[L}\Lambda^{1}_{|\alpha|K]}+\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{1}_{|n|K]})\omega^{L}\wedge\omega^{K}=R^{1}_{1LK}\,\omega^{L}\wedge\omega^{K}; \quad (3.10)$$

$$R^{1}_{1LK}=\Lambda^{\alpha}_{1[L}\Lambda^{1}_{|\alpha|K]}+\Lambda^{n}_{1[L}\lambda^{1}_{|n|K]}. \quad (3.11)$$

Теорема 6. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение (полем нормалей 1-го рода $N_1(x)$) индуцирует внутреннюю связность η в касательном расслоении $T_1(A_n)$ с формами связности $\{\omega^{K},\omega^{1}_{1}\}$ и 2-формами кривизны (3.10). Компоненты тензора кривизны R^{1}_{1LK} связности η имеют строение (3.11).*

5. Построим нормальную связность $\vartheta^{\perp}$ в расслоении $N_2(A_n)$ нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения данного $\mathcal{H}$-распределения и связность ϑ в касательном расслоении $T_{n-2}(A_n)$.

Структурные уравнения нормального распределения $N_2(A_n)$ имеют следующий вид:

$$d\omega^1_1 = \Omega^1_1,\ d\omega^1_n = \omega^1_n \wedge \omega^1_1 + \omega^\alpha_n \wedge \omega^1_\alpha + \omega^n_n \wedge \omega^1_n = \omega^\xi_n \wedge \omega^1_\xi + \Omega^1_n,$$

$$d\omega^n_n = \Omega^n_n,\ d\omega^n_1 = \omega^1_1 \wedge \omega^n_1 + \omega^\alpha_1 \wedge \omega^n_\alpha + \omega^n_1 \wedge \omega^n_n = \omega^\xi_1 \wedge \omega^n_\xi + \Omega^n_1,$$

где

$$\Omega^1_1 = (\Lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]} + \Lambda^n_{1[L}\lambda^1_{|n|K]})\omega^L \wedge \omega^K = R^1_{1LK}\,\omega^L \wedge \omega^K,$$

$$\Omega^1_n = \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]}\,\omega^L \wedge \omega^K = R^1_{nLK}\,\omega^L \wedge \omega^K,$$

$$\Omega^n_1 = \Lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]}\,\omega^L \wedge \omega^K = R^n_{1LK}\,\omega^L \wedge \omega^K, \tag{3.12}$$

$$\Omega^n_n = (\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]} + \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]})\omega^L \wedge \omega^K = R^n_{nLK}\,\omega^L \wedge \omega^K;$$

$$R^{\ 1}_{1LK} = \Lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]} + \Lambda^n_{1[L}\lambda^1_{|n|K]},\ R^{\ 1}_{nLK} = \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^1_{|\alpha|K]}; \tag{3.13}$$

$$R^n_{1LK} = \lambda^\alpha_{1[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]},\quad R^n_{nLK} = \lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]} + \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]}. \tag{3.14}$$

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение индуцирует внутреннюю нормальную аффинную связность $\vartheta^\perp$ в расслоении $N_2(A_n)$ нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения с формами связности $\{\omega^\xi_\eta\}$ и 2-формами кривизны $\{\Omega^\xi_\eta\}$ (3.12), компоненты тензора кривизны $R^\xi_{\eta LK}$ которой имеют строение (3.13, 3.14).*

Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-2}(X)$ имеют вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega^K_L,\ d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha,$$

где

$$\Omega^\beta_\alpha = (\Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]})\,\omega^L \wedge \omega^K = R^\beta_{\alpha LK}\omega^L \wedge \omega^K; \tag{3.15}$$

$$R^\beta_{\alpha LK} = \Lambda^n_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|n|K]} + \Lambda^1_{\alpha[L}\lambda^\beta_{|1|K]}. \tag{3.16}$$

Теорема 8. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}$-распределение индуцирует внутреннюю аффинную связность ϑ в касательном расслоении $T_{n-2}(A_n)$*

с формами связности $\{\omega^K, \omega_\alpha^\beta\}$ *и 2-формами кривизны (3.15). Компоненты тензора* $R^\beta_{\alpha LK}$ *связности* ϑ *имеют строение (3.16).*

Список литературы

1. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геометр. семинара. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

2. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 1986. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87, №6807-1387.

3. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения *m*-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

4. *Попов Ю.И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосного H(L)-распределения аффинного пространства. Калининград, 2010. Деп. В ВИНИТИ РАН 21.06.2010, №385-В2010.

5. *Попов Ю.И.* Нормализация Тренсона гиперполосы H_m // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 38. Калининград, 2007. С. 117—122.

6. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: учебное пособие. Калининград, 1983.

7. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: монография. Ереван, 1990.

Yu. Popov

INTRODUCTION OF CONNECTIONS ON THE $\mathcal{H}$-DICTRIBUTION OF AFFINE SPACE

The definition of normal and affine connections is reviewed on equipped $\mathcal{H}$-distribution.