ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I9 1988

УДК 514.75

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА,ПОРОЖДЕННЫЕ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ГАЛИЛЕЯ,И ИХ МОРФИЗМЫ

А.Н.Метлицкий

(Гродненский университет)

В данной работе для группы Ли,являющейся естественным обобщением группы движений пространства Галилея [1],строится общая глобальная пара [2],на основании которой определяются серии однородных пространств,а также находятся их морфизмы[3].

Пусть G -группа Ли.Запись $G=K*H$ будет обозначать в дальнейшем представление G в виде полупрямого произведения нормального делителя K и подгруппы H группы G .Введем

Определение I. Нормальный делитель K назовем базовым в G ,если $G=K*H$,и в G не существует нетривиального нормального делителя K' ,такого,что $K'\subset K$ и $G=K'*H'$.

Определение 2. Группу Ли G назовем максимально расщепляемой,если $G=K_0*G_1$, $G_1=K_1*G_2, \ldots, G_{n-1}=K_{n-1}*G_n$, все K_i -базовые в G_i, G_n не представима в виде полупрямого произведения.Такую группу Ли будем записывать в виде

$$G=K_0*K_1*\ldots*K_i*G_{i+1}=\{g=k_0k_1\ldots k_i g_{i+1},\ k_i\in K_i,\ g_{i+1}\in G_{i+1},\ i=\overline{0,n+1}\}.$$

I.Рассмотрим группу Ли

$$G=\left\{g=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \bar a&U&0\\ \bar b&CU&V\end{pmatrix},\ \bar a,\bar b\in\mathbb{R}^n,\ U,V\in O(n),\ C\in GL(n,\mathbb{R})\right\},\qquad(1)$$

являющуюся обобщением группы движений пространства Галилея.

Предложение 1. G -максимально расщепляема,и все ее расщепления имеют вид:

$$G=K_0*K_1*G_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\ \bar a&E&0\\ \bar b&0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&E&0\\ 0&C&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&U&0\\ 0&0&V\end{pmatrix}\right\},\qquad(2)$$

$$G=K_0*K_1*G_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&E&0\\ \bar b-C\bar a&C&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \bar a&E&0\\ 0&0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&U&0\\ 0&0&V\end{pmatrix}\right\},\qquad(3)$$

$$G=K_0*K_1*K_2*G_3=\left\{k_0\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&E&0\\ 0&0&V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ \bar a&E&0\\ 0&0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&U&0\\ 0&0&E\end{pmatrix}\right\}.\qquad(4)$$

Доказательство предложения следует из определения 2.Здесь мы рассматриваем $\bar a$, $\bar b$, U, V, C как элементы G ,не различая их внутреннюю структуру.

2.Далее будем изучать расщепление (4).Оно определяет гладкие идемпотенты

$$\Phi_0:\ G\to G_1:\ g=k_0g_1\to g_1,\qquad(5)$$

$$\Phi_1:\ G\to G_2:\ g=k_0g_1g_2\to g_2,\qquad(6)$$

$$\Phi_2:\ G\to G_3:\ g=k_0g_1g_2g_3\to g_3.\qquad(7)$$

Гладкость отображений (5)-(7) следует из того,что в полупрямом произведении $G=K*H$ группа Ли G ,как многообразие, есть прямое произведение K и H ,а также того,что $K'=K_0K_1$ и $K''=K_0K_1K_2$ -нормальные делители G .

Рассмотрим также набор гладких инволютивных автоморфизмов G

$$\psi_i:\ g\to\varepsilon_i g\varepsilon_i^{-1},$$

где

$$\varepsilon_i=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 0&E&0\\ 0&0&\omega_i\end{pmatrix},\quad \omega_i=\begin{pmatrix}E_i&0\\ 0&-E_j\end{pmatrix},\quad i+j=n,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Заметим,что подгруппы G_1, G_2, G_3 группы G инвариантны относительно ψ_i .

Заданием отображений Φ_k и ψ_i определяются пары (G,Γ_k), где $\Gamma_k=[\Phi_k\circ\psi_1,\ldots,\Phi_k\circ\psi_{n-1}]$, $k=0,1,2$,для которых справедливо

Предложение 2. Пары (G,Γ_k)-есть общие глобальные пары.

Доказательство достаточно провести для порождающих элементов Γ_k с использованием определения общей глобальной пары [2].

Естественным образом определяется пара (G,Γ),где

$\Gamma=[\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\dots,\Psi_{n-1}]$ -конечная абелева полугруппа гладких эндоморфизмов G. Такую пару будем также называть общей парой. Заметим, что (G,Γ) обладает важным свойством полноты: подгруппа $H^{\Gamma}=\{h\in G, \Lambda(h)=h, \Lambda\in\Gamma\}$ -дискретна. Действительно, из того, что $\Phi_0(h)=h, \Phi_1(h)=h, \Phi_2(h)=h$, следует, что $h=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&E&0\\0&0&B\end{pmatrix}$.

Далее, $\psi_i(h)=h\Rightarrow\varepsilon_i h=h\varepsilon_i\Rightarrow\omega_i B\omega_i=B$ или более подробно

$$\begin{pmatrix}E_i&0\\0&-E_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&C\\D&F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&C\\D&F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_i&0\\0&-E_j\end{pmatrix},$$

откуда C, D -нулевые матрицы. Отсюда следует, что B -блочно-диагональная матрица. Меняя i от 1 до $n-1$, получим диагональную матрицу, на диагонали которой все элементы имеют вид ± 1. Нетрудно убедиться, что для $\forall\Gamma_1\subset\Gamma$ H^{Γ_1} не является дискретной. Другими словами, выполняется свойство минимальности пары (G,Γ). Приведенные выше рассуждения приводят к следующей

Т е о р е м е I. Общая глобальная пара (G,Γ) -минимальная, полная.

3. Следуя [2], определим однородные пространства, порождаемые парой (G,Γ):

$$\bar{M}_0=\{x_0=g\,\Phi_0(g^{-1})=k_0\}, \tag{8}$$

$$M_1=\{x_1=g\,\Phi_1(g^{-1})=k_0k_1\}, \tag{9}$$

$$M_2=\{x_2=g\,\Phi_2(g^{-1})=k_0k_1k_2, \tag{10}$$

$$N_i=\{y=g\,\Psi_i(g^{-1})=g\,\varepsilon_i\,g^{-1}\varepsilon_i\}, \tag{11}$$

$$N_0^i=\{y_0=g\,(\Psi_i\circ\Phi_0)(g^{-1})=g\,\varepsilon_i\,g_0^{-1}\,\varepsilon_i\}, \tag{12}$$

$$N_1^i=\{y_1=g\,(\Psi_i\circ\Phi_1)(g^{-1})=g\,\varepsilon_i\,g_1^{-1}\,\varepsilon_i\}, \tag{13}$$

$$N_2^i=\{y_2=g\,(\Psi_i\circ\Phi_2)(g^{-1})=g\,\varepsilon_i\,g_2^{-1}\,\varepsilon_i\}. \tag{14}$$

Действие группы G на пространствах (8)-(I4) определяется естественным образом. Справедливо следующее предложение:

П р е д л о ж е н и е 3. Отображения

$$\varphi_{k_0}: M_k\to M_0:\ x_k\to x_k\,\Phi_0(x_k^{-1}),\quad k=1,2,$$

$$\varphi_{21}: M_2\to M_1:\ x_2\to x_2\,\Phi_1(x_2^{-1}),$$

$$\varphi_{ik}: N_k^i\to M_k:\ y_k\to y_k\,\Phi_k(y_k^{-1}),\ k=0,1,$$

$$\varphi_{i2}: N_2^i\to M_2:\ y_2\to y_2\,\Phi_2(y_2^{-1}),$$

$$\varphi_{ki}: N_k^i\to N^i:\ y_k\to y_k(\Psi_i\circ\Phi_k)(y_k)\,\Psi_i(y_k^{-1}),\ k=0,1,2,$$

$$\varphi_{k0}^i: N_k^i\to M_0:\ y_k\to y_k\,\Phi_0(y_k^{-1}),\ k=0,1,$$

$$\varphi_{01}^i: N_0^i\to M_1:\ y_0\to y_0\,\Phi_1(y_0^{-1}),$$

$$f_{2m}^i: N_2^i\to N_m^i:\ y_2\to y_2(\Psi_i\circ\Phi_2)(y_2)(\Psi_i\circ\Phi_m)(y_2^{-1}),\ m=0,1,$$

$$f_{10}^i: N_1^i\to N_0^i:\ y_1\to y_1(\Psi_i\circ\Phi_1)(y_1)(\Psi_i\circ\Phi_0)(y_1^{-1}),$$

$$\varphi_{21}^i: N_2^i\to M_1:\ y_2\to y_2\,\Phi_1(y_2^{-1})$$

есть морфизмы однородных пространств (8)-(I4).

Приведенные выше рассуждения справедливы для группы Ли [4]

$$\bar{G}=\left\{\bar{g}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\alpha&\pm1&0\\\bar{p}&\bar{\tau}&W\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R},\ \bar{p},\bar{\tau}\in\mathbb{R}^n,\ W\in O(n)\right\},$$

являющейся группой движений пространства Галилея Γ_n. В этом случае пространство $\bar{M}_0$ будет иметь вид:

$\bar{M}_0=\left\{\bar{k}_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\\alpha&1&0\\\bar{p}&0&E\end{pmatrix}\right\}$. Зададим действие группы $\bar{G}$ на Γ_n в виде $x\to\bar{g}x$, где $\bar{g}\in\bar{G}$, $x\in\Gamma_n$. Тогда отображение $f:\bar{M}_0\to\Gamma_n: \bar{k}_0\to x$ определяет изоморфизм $\bar{G}$ -пространства $\bar{M}_0$ на $\bar{G}$ -пространство Γ_n.

Библиографический список

I. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, I969. 547с.

2. В е д е р н и к о в В.И., Ведерников С.В. Однородные пространства центральных квадрик аффинного пространства// Изв. вузов. Математика. I984. № 7. С.34-38.

3. Ф е д е н к о А.С. Пространства с симметриями. Минск, I977. I67с.

4. Б у р б а к и Н. Группы и алгебры Ли. М. Мир. I972. 334с.