Библиографический список

1. *Чешкова М.А.* Конформное соответствие ортогональных 2-поверхностей в E^4 // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 1995. N26. С.108-112.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.
3. *Чешкова М.А.* К геометрии пары ортогональных n-поверхностей в E_{2n} // Сибир. мат. журнал. 1995. N1. С.228-232.

M.A. C h e s h k o v a

ON A PROPERTY OF ORTHOGONAL SURFACE IN E^4

In a Euclidean space E^4 are considered two smooth 2-surfaces $M, \overline{M}$ and diffeomorphism $f:M\to \overline{M}$. The case is investigated, when tangent 2-planes in appropriate points $p\in M$, $f(p) \in \overline{M}$ are orthogonal. The mapping $\Omega:TM\to T^{\perp}M$, where $\Omega X=dfX$, $X\in TM$ is defined.

Theorem. If two orthogonal surfaces $M, \overline{M}$ in E^4 have flat connections and principal normals of surfaces $M, \overline{M}$ are 2-dimenstional, then $\eta= -\Omega\overline{\eta}$, where η, $\overline{\eta}$ - vectors of middle normals of surfaces M, $\overline{M}$.

УДК 514.75

ДВЕ ПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НЕГОЛОНОМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

В проективном пространстве рассмотрена неголономная поверхность или распределение плоскостей. Показано, что проективное пространство и распределение являются голономными гладкими многообразиями.

С распределением ассоциировано обобщенное расслоение линейных реперов. Применение способа Лаптева задания групповой связности к обобщенному расслоению привело к проективной связности классического типа. Выделен класс проективных связностей, названных каноническими. Оснащение распределения по Картану индуцирует каноническую проективную связность Лаптева.

Совершен переход от обобщенного расслоения к главному расслоению так называемых центролинейных реперов и соответствующей связности. Каноническая и центролинейная связности образуют два непересекающихся класса проективных связностей. Произведено композиционное оснащение распределения, состоящее в задании полей плоскостей Картана и нормалей 2-го рода. Доказано, что композиционное оснащение индуцирует центролинейную связность. Последняя охарактеризована с помощью параллельного перенесения нормали 2-го рода, когда она смещается в гиперплоскости, натянутой на эту нормаль и плоскость Картана. Индуцированная линейная подсвязность интерпретирована проектированием смежных нормалей 2-го рода друг на друга из центра - нормали 1-го рода, порожденной плоскостью Картана.

1. **Голономность распределения.** Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A_I\}$ ($I,J,K=\overline{0,n}$), деривационные формулы вершин которого имеют вид:

$$dA_I=\omega_I^J A_J, \tag{1}$$

причем пфаффовы формы ω_I^J удовлетворяют уравнениям Картана

$$D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J. \tag{2}$$

Это структурные уравнения линейной группы GL(n+1), действующей неэффективно в пространстве P_n. Условие проективности $\omega_I^I=0$ выделяет специальную линейную группу, изоморфную проективной группе GP(n), действующей эффективно в пространстве P_n.

Рассмотрим неголономную поверхность NS_n или распределение 1-го рода [1] m-плоскостей P_m. Через каждую точку A пространства P_n проведем плоскость P_m. Получится n-мерное семейство NS_n центрированных m-плоскостей $P_m^*=(A,P_m)$, где $A\in P_m$. Произведем специализацию репера R, помещая вершину A_0 в точку A, а вершины A_a ($a,b,c=\overline{1,m}$) в соответствующую плоскость P_m. Это - репер нулевого порядка R_0. Из формул (1) следуют уравнения стационарности центрированной плоскости P_m^*

$$\omega_0^i=0,\ \omega_a^\alpha=0\ (i,j,k,l=\overline{1,n};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n}),$$

причем 1-я подсистема фиксирует точку A. Запишем дифференциальные уравнения распределения NS_n в репере R_0

$$\omega_a^\alpha=\Lambda_{ai}^\alpha\omega^i\ (\omega^i=\omega_0^i). \tag{3}$$

Из уравнений (2) вытекает, что базисные формы ω^i удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\theta_j^i, \tag{4}$$

где

$$\theta_j^i=\omega_j^i-\delta_j^i\omega\ (\omega=\omega_0^0). \tag{5}$$

Дифференцируем эти формы внешним образом

$$D\theta_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i+\omega_j\wedge\omega^i-\delta_j^i\omega^k\wedge\omega_k\ (\omega_j=\omega_j^0).$$

Подставляя выражения форм ω_j^i из равенств (5), получим

$$D\theta_j^i=\theta_j^k\wedge\theta_k^i+\omega^k\wedge\theta_{jk}^i,$$

где

$$\theta_{jk}^i=-\delta_j^i\omega_k-\delta_k^i\omega_j, \tag{6}$$

т.е. формы θ_{jk}^i симметричны по нижним индексам . Найдем

$$D\theta^i_{jk} = \theta^l_k \wedge (-\delta^i_j\omega_l) + \theta^l_j \wedge (-\delta^i_k\omega_l).$$

Введем в правую часть формы θ^i_{jk} с помощью равенств (6).

$$D\theta^i_{jk} = \theta^l_{jk} \wedge \theta^i_l - \theta^i_{lk} \wedge \theta^l_j - \theta^i_{jl} \wedge \theta^l_k + \omega^l \wedge \theta^i_{jkl},$$

где $\theta^i_{jkl} = 0$. Формы ω^i являются базисными для пространства P_n и распределения NS_n, поэтому справедлива

Теорема 1. Проективное пространство P_n и неголономная поверхность или распределение NS_n являются голономными [2] гладкими многообразиями.

Продолжая дифференциальные уравнения (3), получим

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ai} - \delta^\alpha_i\omega_a = \Lambda^\alpha_{aij}\omega^j \;\Leftrightarrow\; \Delta\Lambda^\alpha_{ai} - \delta^\alpha_i\omega_a \equiv 0, \tag{7}$$

где $\Lambda^\alpha_{a[ij]} = 0$, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ai} = d\Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_{aj}\theta^j_i - \Lambda^\alpha_{bi}\omega^b_a + \Lambda^\beta_{ai}\omega^\alpha_\beta.$$

Запишем сравнения (7) для фундаментального объекта 1-го порядка Λ^α_{ai} распределения NS_n подробнее

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ab} + \Lambda^\alpha_{ab}\omega \equiv 0,\; \Delta\Lambda^\alpha_{a\beta} + \Lambda^\alpha_{a\beta}\omega - \Lambda^\alpha_{ab}\omega^b_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega_a \equiv 0,$$

где, например,

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ab} = d\Lambda^\alpha_{ab} - \Lambda^\alpha_{ac}\omega^c_b - \Lambda^\alpha_{cb}\omega^c_a + \Lambda^\beta_{ab}\omega^\alpha_\beta.$$

Значит, фундаментальный подобъект Λ^α_{ab} образует тензор.

Структурные уравнения (4) представим в виде:

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \theta^a_b + \omega^\alpha \wedge \omega^a_\alpha, \tag{8}$$

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge (\theta^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{a\beta}\omega^a) + N^\alpha_{ab}\omega^a \wedge \omega^b, \tag{9}$$

где $N^\alpha_{ab} = \Lambda^\alpha_{[ab]}$ - тензор неголономности [3]. Если $N^\alpha_{ab} = 0$, то распределение NS_n называется голономным [3]; обозначим его S_n . В этом случае из структурных уравнений (9) видно, что система дифференциальных уравнений ω^α=0 вполне интегрируема. Она выделяет из голономного распределения S_n m -поверхность S_m как семейство касательных плоскостей P^*_m. Голономное распределение S_n расслаивается [3] на (n-m)-мерное многообразие V_{n-m} m-мерных семейств центрированных плоскостей P^*_m, одним из которых является поверхность S_m. Структурные уравнения (8) показывают, что система $\omega^a /_{\omega^\alpha=0} = 0$ вполне интегрируема на поверхности S_m и фиксирует плоскость P^*_m.

2. **Проективная связность классического типа.** Из уравнений Картана (2) с учетом уравнений (3) распределения NS_n следует, что формы ω^A_B(A, B, C=$\overline{0,m}$) удовлетворяют структурным уравнениям [3]

$$D\omega^A_B = \omega^C_B \wedge \omega^A_C + \omega^i \wedge \omega^A_{Bi}, \tag{10}$$

где

$$\omega^A_{Bi} = \Lambda^\alpha_{Bi}\omega^A_\alpha \;\; (\Lambda^\alpha_{0i} = \delta^\alpha_i).$$

Уравнения (4,10) аналогичны структурным уравнениям главного расслоения линейных реперов, но таковыми не являются, т.к. формы $\omega^i = \{\omega^a, \omega^\alpha\}$ и $\omega^A_B = \{\omega^a_b, \omega^a, \omega_a, \omega\}$ имеют общую часть ω^a.

Определение 1. Обобщенным расслоением $L_{m^2+m+1+(m)}(P_n)$ [4] линейных реперов, принадлежащих плоскостям P_m распределения NS_n, назовем гладкое многообразие со структурными уравнениями (4,10). Типовой слой $L_{m^2+m+1+(m)}=GL(m+1)$ - линейная группа, действующая неэффективно в плоскости P_m, причем $(m)=\dim GL(m+1)\cap P_n$ - размерность пересечения слоя и базы.

Применим к расслоению $L_{m^2+m+1+(m)}(P_n)$ способ Лаптева [5] задания связности в главном расслоении. Рассмотрим формы [3]

$$\tilde{\omega}^A_B = \omega^A_B - \Pi^A_{Bi}\omega^i, \tag{11}$$

где Π^A_{Bi} - некоторые функции. Возьмем внешние дифференциалы форм (11)

$$D\tilde{\omega}^A_B = \omega^C_B \wedge \omega^A_C + \omega^i \wedge (d\Pi^A_{Bi} - \Pi^A_{Bj}\theta^j_i + \omega^A_{Bi}).$$

Подставим выражения форм ω^A_B из равенств (11)

$$D\varpi^A_B = \varpi^C_B \wedge \varpi^A_C + \varpi^C_B \wedge \Pi^A_{Cj}\omega^j + \Pi^C_{Bi}\omega^i \wedge \varpi^A_C +$$

$$+ \Pi^C_{Bi}\omega^i \wedge \Pi^A_{Cj}\omega^j + \omega^i \wedge (d\Pi^A_{Bi} - \Pi^A_{Bj}\theta^j_i + \omega^A_{Bi}).$$

Во 2-м и 3-м слагаемых вернемся к исходным формам

$$D\tilde{\omega}^A_B = \varpi^C_B \wedge \varpi^A_C + \omega^i \wedge (\Delta\Pi^A_{Bi} + \omega^A_{Bi}) - \Pi^C_{Bi}\Pi^A_{Cj}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{12}$$

где

$$\Delta\Pi^A_{Bi} = d\Pi^A_{Bi} - \Pi^A_{Bj}\theta^j_i - \Pi^A_{Ci}\omega^C_B + \Pi^C_{Bi}\omega^A_C.$$

Задавая поле объекта проективной связности (ср. [3,с.69])

$$\Delta\Pi^A_{Bi} + \omega^A_{Bi} = \Pi^A_{Bij}\omega^j, \tag{13}$$

преобразуем уравнение (12) к виду [3]:

$$D\tilde{\omega}^A_B = \varpi^C_B \wedge \varpi^A_C + R^A_{Bij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{14}$$

где

$$R^A_{Bij} = \Pi^A_{B[ij]} - \Pi^C_{B[i}\Pi^A_{Cj]}, \tag{15}$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Продолжая уравнения (13), получим

$$\Delta\Pi^A_{Bij} - \Pi^A_{Bk}\theta^k_{ij} - \Pi^A_{Ci}\omega^C_{Bj} + \Pi^C_{Bi}\omega^A_{Cj} + \Lambda^\alpha_{Bij}\omega^A_\alpha \equiv 0 \ (\Lambda^\alpha_{0ij} = 0).$$

Альтернируем по индексам i, j

$$\Delta\Pi^A_{B[ij]} - \Pi^A_{C[i}\omega^C_{Bj]} + \Pi^C_{B[i}\omega^A_{Cj]} \equiv 0. \tag{16}$$

Найдем сравнения для 2-го слагаемого в формуле (15)

$$\Delta\Pi^C_{B[i}\Pi^A_{Cj]} + \omega^C_{B[i}\Pi^A_{Cj]} + \Pi^C_{B[i}\omega^A_{Cj]} \equiv 0.$$

Вычитая из сравнений (16), имеем [3]

$$\Delta R^A_{Bij} \equiv 0. \tag{17}$$

Теорема 2. Применение способа Лаптева задания групповой связности к обобщенному расслоению линейных реперов $L_{m^2+m+1+(m)}(P_n)$ приводит к пространству проективной связности $P_{m^2+m+1+(m),n}$ со структурными уравнениями (4,14) и тензором кручения-кривизны R^A_{Bij}, выражающимся по формуле (15) через объект проективной связности Π^A_{Bi} и его пфаффовы производные.

Сравнения (17) запишем подробнее

$$\Delta R^a_{0ij} - R^a_{0ij}\omega \equiv 0,\ \Delta R^0_{0ij} + R^a_{0ij}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta R^a_{bij} - R^a_{0ij}\omega_b \equiv 0,\ \Delta R^0_{bij} + R^0_{bij}\omega + R^c_{bij}\omega_c - R^0_{0ij}\omega_b \equiv 0. \qquad (18)$$

Теорема 3. Тензор кручения-кривизны R^A_{Bij} проективной связности содержит четыре подтензора: R^a_{0ij}, $\{R^0_{0ij}, R^a_{0ij}\}$, $\{R^a_{bij}, R^a_{0ij}\}$, $\{R^a_{0ij}, R^0_{0ij}, R^a_{bij}\}$, первый из которых является тензором кручения [3] проективной связности.

Выпишем структурные уравнения с тензором кручения

$$D\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge (\tilde{\omega}^a_b - \delta^a_b\tilde{\omega}) + R^a_{0ij}\omega^i \wedge \omega^j.$$

Если проективная связность без кручения: $R^a_{0ij}=0$, то система дифференциальных уравнений $\tilde{\omega}^a = 0$ вполне интегрируема и фиксирует точку некоторого m-мерного гладкого многообразия M_m. Эта система преобразуется к виду:

$$(\delta^a_b - \Pi^a_{0b})\omega^b = \Pi^a_{0\alpha}\omega^\alpha,$$

откуда в общем случае можно выразить формы ω^b через формы ω^α, что даст дифференциальные уравнения (n-m) - поверхности X_{n-m}, рассматриваемой как семейство точек. Верно и обратное.

Теорема 4. Пространство проективной связности $P_{m^2+m+1+(m),n}$ не имеет кручения тогда и только тогда, когда проективное пространство P_n расслаивается на m-мерное многообразие M_m (n-m)-поверхностей.

3. **Оснащение Картана.** Запишем дифференциальные уравнения (13) объекта проективной связности Π^A_{Bi} в виде следующих сравнений:

$$\Delta\Pi^A_{bi} - \Pi^A_{0i}\omega_b + \omega^A_{bi} \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^A_{0\alpha} - \Pi^A_{0a}\omega^a_\alpha + \omega^A_\alpha \equiv 0,\ \Delta\Pi^A_{0c} \equiv 0.$$

Подобъект Π^A_{0c} объекта Π^A_{Bi} образует тензор, поэтому его обращение в нуль инвариантно. Положим [3]

$$\Pi^A_{0c} = 0, \qquad (19)$$

тогда дифференциальные сравнения для остальных компонент упростятся

$$\Delta\Pi^A_{bc} + \Pi^A_{bc}\omega + \omega^A_{bc} \equiv 0,\ \Delta\Pi^A_{0\alpha} + \omega^A_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^A_{b\alpha} + \Pi^A_{b\alpha}\omega - \Pi^A_{bc}\omega^c_\alpha - \Pi^A_{0\alpha}\omega_b + \omega^A_{b\alpha} \equiv 0. \qquad (20)$$

Определение 2. Если компоненты Π^A_{0c} объекта проективной связности Π^A_{Bi} равны нулю, то объект Π^A_{Bi} назовем каноническим и обозначим $\overset{0}{\Pi}{}^A_{Bi}$.

Определение 3. Оснащением Картана распределения NS_n будем называть присоединение к каждой плоскости P_m (n-m-1)-мерной плоскости C_{n-m-1}, не пересекающейся с ней.

Зададим плоскость Картана C_{n-m-1} точками

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^A_\alpha A_A, \tag{21}$$

причем функции λ^A_α удовлетворяют сравнениям

$$\Delta\lambda^A_\alpha + \omega^A_\alpha \equiv 0. \tag{22}$$

Объект канонической проективной связности $\overset{\circ}{\prod}{}^A_{Bi}$ охватывается фундаментальным объектом Λ^α_{ai} и оснащающим квазитензором λ^A_α по формуле [3,с.73]

$$\overset{\alpha}{\prod}{}^A_{Bi} = \lambda^A_\alpha \Lambda^\alpha_{Bi}, \tag{23}$$

проверяемой с помощью соотношений (7,19,20,22).

Теорема 5. Оснащение Картана распределения NS_n индуцирует каноническую проективную связность с объектом (23) - связность Лаптева.

Из формул (1) с помощью выражений (21) найдем

$$dA_A = \overset{\lambda}{\omega}{}^B_A A_B + \omega^\alpha_A B_\alpha,$$

где $\overset{\lambda}{\omega}{}^B_A$ - формы связности Лаптева. Отсюда следует

Теорема 6. Связность Лаптева характеризуется [3,с.73] проекцией на плоскость P_m смежной с ней плоскости P_m+dP_m из центра C_{n-m-1}. В символической записи

$$\overset{\alpha}{\prod}{}^A_{Bi} : P_m+dP_m \overset{C_{n-m-1}}{\longrightarrow} P_m.$$

4. **Центролинейная связность.** Перейдем от обобщенного расслоения $L_{m^2+m+1+(m)}(P_n)$ к соответствующему главному расслоению. Записывая структурные уравнения (10) подробнее и удаляя общую с уравнениями (4) часть - уравнения (8), получим

$$D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^i \wedge \Omega^a_{bi} \ (\Omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\omega^a_\alpha - \delta^a_i\omega_b),$$

$$D\omega = \omega^i \wedge \omega_i,\ D\omega_a = \omega_a \wedge \omega + \omega^b_a \wedge \omega_b + \omega^i \wedge \omega^0_{ai}. \tag{24}$$

Уравнения (4,24) являются структурными уравнениями главного расслоения $CL_{m^2+m+1}(P_n)$, базой которого служит пространство P_n, а типовым слоем - группа $CL_{m^2+m+1} \subset GL(m+1)$, действующая неэффективно в центрированной плоскости P^*_m. Формы [6,с.227]

$$\overline{\omega}{}^a_b = \omega^a_b /_{\omega^i=0},\ \overline{\omega}_a = \omega_a /_{\omega^i=0},\ \overline{\omega} = \omega /_{\omega^i=0}$$

являются базисными формами группы CL_{m^2+m+1}. Группу CL_{m^2+m+1} назовем центролинейной, а $CL_{m^2+m+1}(P_n)$ - расслоением центролинейных реперов. Центролинейная группа CL_{m^2+m+1} возникает в проективно-дифференциальной геометрии поверхности [7, с.184], но не совпадает с проективно-дифференциальной группой PD^1_m [7, с.177].

Групповую связность в расслоении центролинейных реперов $CL_{m^2+m+1}(P_n)$ зададим по Лаптеву с помощью форм

$$\widehat{\omega}^a_b=\omega^a_b-\Gamma^a_{bi}\omega^i,\ \widehat{\omega}_a=\omega_a-\Gamma_{ai}\omega^i,\ \widehat{\omega}=\omega-\Gamma_i\,\omega^i. \qquad (25)$$

Внешние дифференциалы этих форм имеют вид:

$$D\widehat{\omega}^a_b=\widehat{\omega}^c_b\wedge\widehat{\omega}^a_c+\omega^i\wedge(\Delta\Gamma^a_{bi}+\Omega^a_{bi})-\Gamma^c_{bi}\omega^i\wedge\Gamma^a_{cj}\omega^j,$$

$$D\,\widehat{\omega}_a=\widehat{\omega}_a\wedge\widehat{\omega}+\widehat{\omega}^b_a\wedge\widehat{\omega}_b-(\Gamma_{ai}\Gamma_j+\Gamma^b_{ai}\Gamma_{bj})\omega^i\wedge\omega^j+$$
$$+\,\omega^i\wedge(\Delta\Gamma_{ai}+\Gamma_{ai}\omega+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_i\,\omega_a+\omega^0_{ai}), \qquad (26)$$

$D\widehat{\omega}=\omega^i\wedge(\Delta\Gamma_i+\omega_i)$. Согласно теореме Картана-Лаптева [5] для задания связности в расслоении $CL_{m^2+m+1}(P_n)$ нужно задать поле объекта $\Gamma=(\Gamma^a_{bi},\ \Gamma_{ai},\ \Gamma_i\,)$ на пространстве P_n

$$\Delta\Gamma^a_{bi}+\Omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\omega^j,\Delta\Gamma_i+\omega_i=\Gamma_{ij}\,\omega^j, \qquad (27)$$
$$\Delta\Gamma_{ai}+\Gamma_{ai}\omega+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_i\,\omega_a+\omega^0_{ai}=\Gamma_{aij}\omega^j.$$

Уравнения (26) примут вид:

$$D\widehat{\omega}^a_b=\widehat{\omega}^c_b\wedge\widehat{\omega}^a_c+\mathfrak{R}^a_{bij}\omega^i\wedge\omega^j,\ D\widehat{\omega}=\mathfrak{R}_{ij}\omega^i\wedge\omega^j, \qquad (28)$$

$$D\widehat{\omega}_a=\widehat{\omega}_a\wedge\widehat{\omega}+\widehat{\omega}^b_a\wedge\widehat{\omega}_b+\mathfrak{R}_{aij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

где

$$\mathfrak{R}^a_{bij}=\Gamma^a_{b[ij]}-\Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{cj]},\ \mathfrak{R}_{ij}=\Gamma_{[ij]},\ \mathfrak{R}_{aij}=\Gamma_{a[ij]}-\Gamma_{a[i}\Gamma_{j]}-\Gamma^b_{a[i}\Gamma_{bj]}. \qquad (29)$$

Продолжая дифференциальные уравнения (27), получим

$$\Delta\Gamma^a_{bij}-\Gamma^a_{bk}\theta^k_{ij}-\Gamma^a_{ci}\Omega^c_{bj}+\tilde{A}^c_{bi}\Omega^a_{ij}+\Lambda^\alpha_{bij}\omega^a_\alpha-\delta^a_j\omega^0_{bi}-\delta^a_i\omega^0_{bj}\equiv 0,$$
$$\Delta\,\Gamma_{aij}+\Gamma_{aij}\omega-\Gamma_{bi}\Omega^b_{aj}-\Gamma_{ak}\theta^k_{ij}+\Gamma_{ai}\omega_j+\Gamma^b_{aij}\omega_b+\Gamma^b_{ai}\omega^0_{bj}-$$
$$-\,\Gamma_{ij}\omega_a-\Gamma_i\,\omega^0_{aj}+\Lambda^\alpha_{aij}\omega_\alpha\equiv 0, \qquad \Delta\Gamma_{ij}-\Gamma_k\theta^k_{ij}\equiv 0,$$

откуда в соответствии с формулами (29) найдем

$$\Delta\mathfrak{R}^a_{bij}\equiv 0,\ \Delta\mathfrak{R}_{ij}\equiv 0,\ \Delta\mathfrak{R}_{aij}+\mathfrak{R}_{aij}\omega+\mathfrak{R}^b_{aij}\omega_b-\mathfrak{R}_{ij}\omega_a\equiv 0. \qquad (30)$$

Теорема 7. Объект кривизны центролинейной связности $\mathfrak{R}=\{\mathfrak{R}^a_{bij},\ \mathfrak{R}_{ij},\ \mathfrak{R}_{aij}\}$ является тензором, содержащим 3 подтензора: $\mathfrak{R}^a_{bij}$, $\mathfrak{R}_{ij}$, $\{\mathfrak{R}^a_{bij},\ \mathfrak{R}_{ij}\}$.

Из сопоставления сравнений (18) и (30) вытекает

Теорема 8. Дифференциальные сравнения для тензоров кручения-кривизны R^A_{Bij} с нулевым кручением ($R^a_{0ij}=0$) и центролинейной кривизны $\mathfrak{R}$ совпадают.

Найдем условия совпадения объектов проективной связности Π^A_{Bi} и центролинейной связности Γ. Запишем дифференциальные уравнения (13) для компонент объекта $\Pi^A_{Bi}=\{\Pi^a_{bi},\ \Pi^a_{0i},\ \Pi^0_{ai},\ \Pi^0_{0i}\}$ в виде сравнений

$$\Delta\Pi^a_{bi}-\Pi^a_{0i}\omega^0_b+\omega^a_{bi}\equiv 0,\ \Delta\Pi^a_{0i}-\Pi^a_{0i}\omega+\delta^\alpha_i\omega^a_\alpha\equiv 0,$$
$$\Delta\Pi^0_{ai}+\Pi^0_{ai}\omega+\Pi^b_{ai}\omega_b-\Pi^0_{0i}\omega_a+\omega^0_{ai}\equiv 0,\ \ \Delta\Pi^0_{0i}+\Pi^a_{0i}\omega_a+\delta^\alpha_i\omega_\alpha\equiv 0. \ (31)$$

Полагая

$$\Pi^a_{bi} = \Gamma^a_{bi}, \ \Pi^o_{ai} = \Gamma_{ai}, \ \Pi^0_{0i} = \Gamma_i \tag{32}$$

и сопоставляя соотношения (27) и (31), получим

$$\Pi^a_{0i} = \delta^a_i. \tag{33}$$

Наоборот, из условия (33) следует возможность равенств (32).

Теорема 9. Проективная связность является центролинейной тогда и только тогда, когда выполняется условие (33).

Условия (19) и (33) не совместны, поэтому классы канонической и центролинейной проективных связностей не пересекаются.

5.**Композиционное оснащение**. Рассмотрим оснащение, учитывающее наличие точки A в центрированной плоскости P^*_m, описывающей распределение NS_n.

Определение 4. Композиционным оснащением [8] распределения NS_n центрированных плоскостей P^*_m называется присоединение к каждой плоскости P^*_m двух плоскостей: 1) плоскости Картана C_{n-m-1}; 2) нормали 2-го рода [3] - (m-1)-плоскости N_{m-1}, принадлежащей плоскости P^*_m , но не проходящей через ее центр A.

Плоскость C_{n-m-1} задается квазитензором $\lambda^A_\alpha = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$, для компонент которого сравнения (22) принимают вид:

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha \equiv 0, \ \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha\omega \ + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0. \tag{34}$$

Подквазитензор λ^a_α определяет нормаль 1-го рода [3] - (n-m)-плоскость N_{n-m}: $P^*_m \cap N_{n-m}=A$. Плоскость N_{m-1} зададим точками $B_a=A_a+\lambda_a A$, причем

$$\Delta\lambda_a + \lambda_a\omega \ + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i. \tag{35}$$

Теорема 10. Композиционное оснащение распределения NS_n индуцирует центролинейную связность в расслоении $CL_{m^2+m+1}(P_n)$.

Доказательство. Дифференциальные уравнения для обобщенных символов Кронекера δ^a_i, δ^α_i имеют вид:

$$\Delta\delta^a_i - \delta^a_i\omega + \delta^\alpha_i\omega^a_\alpha = 0, \ \Delta\delta^\alpha_i - \delta^\alpha_i\omega + \delta^a_i\omega^\alpha_a = 0. \tag{36}$$

Фундаментальный объект Λ^α_{ai} распределения NS_n и композиционно оснащающий квазитензор $\{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ охватывают компоненты объекта центролинейной связности Г по формулам

$$\overset{\lambda}{\tilde{A}}{}^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\lambda^a_\alpha + \lambda_b\lambda^a_i, \ \overset{\lambda}{\tilde{A}}_i = \lambda_i - \delta^\alpha_i\lambda^a_\alpha\lambda_a,$$

$$\overset{\lambda}{\tilde{A}}_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\lambda_\alpha + \lambda_a\lambda_b\lambda^b_i \ (\lambda^a_i = \delta^\alpha_i\lambda^a_\alpha - \delta^a_i), \tag{37}$$

проверяемым с помощью соотношений (3, 7, 27, 34-36).

6. **Параллельное перенесение**. Введем формы (25) центролинейной связности в дифференциальные уравнения (35)

$$\nabla\lambda_a = \nabla_i\lambda_a\omega^i, \tag{38}$$

где

$$\nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\hat{\omega}_a^b + \lambda_a\hat{\omega} + \hat{\omega}_a, \quad \nabla_i\lambda_a = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma_{ai}^b - \lambda_a\Gamma_i - \Gamma_{ai}$$

- ковариантный дифференциал и ковариантные производные квазитензора λ_a относительно центролинейной связности Г. С помощью структурных уравнений (28) найдем внешний дифференциал от ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_a$

$$D\nabla\lambda_a = \nabla\lambda_a \wedge \hat{\omega} - \nabla\lambda_b \wedge \hat{\omega}_a^b + T_{aij}\omega^i \wedge \omega^j, \tag{39}$$

где

$$T_{aij} = \mathfrak{R}_{aij} + \lambda_a\mathfrak{R}_{ij} - \lambda_b\mathfrak{R}_{aij}^b.$$

Из соотношений (30, 35) следует, что объект T_{aij} образует тензор с дифференциальными сравнениями

$$\Delta T_{aij} + T_{aij}\omega \equiv 0.$$

В пространстве P_n линия ρ (точнее, направление), проходящая через точку A , задается дифференциальными уравнениями

$$\omega^i = \rho^i\omega, \tag{40}$$

причем $D\omega = \omega \wedge \omega_1$. Из структурных уравнений (39) видно, что система дифференциальных уравнений $\nabla\lambda_a = 0$ вполне интегрируема вдоль любой линии ρ.

Определение 5. Будем говорить, что плоскость N_{m-1} переносится параллельно в центролинейной связности Г вдоль линии ρ, если ковариантный дифференциал $\nabla\lambda_a$ задающего плоскость квазитензора λ_a обращается в нуль вдоль ρ.

Система уравнений параллельного перенесения $\nabla\lambda_a/_\rho=0$ с учетом уравнений (38,40) принимает вид:

$$\nabla_i\lambda_a\rho^i = 0. \tag{41}$$

Здесь m линейных однородных уравнений с n неизвестными ρ^i. В общем случае неизвестные ρ^i определяются из системы (41) с произволом ∞^{n-m}, т.е. в точке A существует (n-m)-мерное направление Π_{n-m}, вдоль одномерных направлений которого можно осуществить параллельное перенесение плоскости N_{m-1}. Если $T_{aij}=0$, то параллельное перенесение возможно вдоль многомерного направления Π_{n-m} . В связи с этим назовем T_{aij} тензором одномерных перенесений, а Π_{n-m} направлением параллельности.

Дифференциалы точек B_a представим так:

$$dB_a = \overset{\lambda}{\nabla}\lambda_a A + \overset{\lambda}{\omega}{}_a^b B_b + (\omega_a^\alpha + \lambda_a\omega^\alpha)B_\alpha, \tag{42}$$

где $\overset{\lambda}{\nabla}\lambda_a$ - ковариантный дифференциал квазитензора λ_a в индуцированной центролинейной связности $\overset{\lambda}{\Gamma}$ (37), $\overset{\lambda}{\omega}{}_a^b$ - формы индуцированной линейной подсвязности, определяемые подобъектом $\overset{\lambda}{\Gamma}{}_{ai}^b \subset \overset{\lambda}{\Gamma}$. Из формулы (42) вытекают

Теорема 11. Плоскость N_{m-1} переносится параллельно относительно индуцированной центролинейной связности $\overset{\lambda}{\Gamma}$ в направлении параллельности $\overset{\lambda}{\Pi}_{n-m}$, определяемом полем плоскостей N_{m-1} и объектом $\overset{\lambda}{\Gamma}$, тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости $B_{n-1}=N_{m-1}\oplus C_{n-m-1}$.

Теорема 12. Линейная подсвязность $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^{b}_{ai}$ характеризуется проекцией на плоскость N_{m-1} смежной с ней плоскости $N_{m-1}+d\,N_{m-1}$ из центра - нормали 1-го рода N_{n-m}. Символически

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^{b}_{ai} : N_{m-1}+d\,N_{m-1} \xrightarrow{N_{n-m}} N_{m-1}\,.$$

Работа выполнена по теме гранта Минобразования РФ (СПбКЦ).

Библиографический список

1. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.
2. *Шевченко Ю.И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 1994. Вып.25. С.110-121.
3. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара /ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.
4. *Шевченко Ю.И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 1990. Вып.21. С. 100-105.
5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248с.
6. *Остиану Н.М.* О некоторых проективно-дифференциальных структурах на дифференцируемом многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1969.Т.2.С.207-246.
7. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии //Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-189.
8. *Шевченко Ю.И.* Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез. докл. VI. Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984. С.137-138.

Ju.I. S h e v c h e n k o

TWO PROJECTIVE CONNECTIONS ON NON-HOLONOMIC SURFACE

In the projective space non-holonomic surface or distribution of planes is considered. It is shown, that the projective space and the distribution are holonomic smooth manifolds.

Generalized bundle of linear frames is associated with the distribution. Laptev′s way of the giving of group connection led to the projective connection of the classical type. Class of the projective connection called canonical, is distinguished. Equipment according to Cartan of the distribution induces the canonical projective Laptev′s connection.

We made transition from the generalized bundle to the principal bundle of so-called center-linear frames and to corresponding connection. The canonical and center-linear connection form two non-intersecting classes of the projective connections. Compositional equipment of the distribution is made, which consists in the setting of Cartan′s planes and normals of the 2-nd kind. It is proved, that the compositional equipment induces the center-linear connection. The latter is characterised by means of normal of 2-nd kind parallel displacement, when it moves in hyperplane drawing on this normal and the Cartan′s plane. Induced linear subconnection is interpreted by projection of neighbouring normals of 2-nd kind onto each other out of center - normal of 1-st king, generated by the Cartan′s plane.

УДК 514.76

f-СТРУКТУРЫ МНОГООБРАЗИЯ ☝(H)

С.Н. Ю р ь е в а

(Калининградский государственный университет)

Продолжается исследование гиперполосных распределений (H-распределений) аффинного пространства [1]. Введена f-структура на многообразии ☝(H), ассоциированном с H-распределением.

Схема использования индексов:

$$I,J,K=\overline{1,n};\ a.b=\overline{1,n-1};\ A,B,C,D=\overline{1,2n-1}.$$

1. Оснащающее H-распределение данного ☟-распределения можно рассматривать как расслоенное многообразие ☝(H), базой которого является аффинное пространство A_n, а слоями - элементы H-расслоения, причем dim☝(H)= =n+(n-1)=2n-1.

Структурные формы этого многообразия можно получить следующим образом. Образующим элементом слоя H(A), где A - центр ☟-распределения, является точка $\vec{X} = \vec{A} + H^a \vec{e}_a$. При этом структурные формы ΔH^a точки X имеют следующее строение:

$$\Delta H^a \overset{def}{=} dH^a + H^b\omega_b^a \ . \tag{1}$$

Внешним дифференцированием равенств (1) находим:

$$D(\Delta H^a)= \Delta H^b \wedge \omega_b^a + \omega^K \wedge H^b H^n_{bK}\omega_n^a . \tag{2}$$

Следовательно, формы ΔH^a имеют расслоенную структуру по отношению к базовым формам ω^K[2]. Система форм $\{\Delta H^a,\omega^K\}$ вполне интегрируема и образует систему структурных форм многообразия ☝(H).

2. Многообразие ☝(H) примем за базу нового расслоенного многообразия T(☝), где T(☝)- касательное расслоение к ☝(H). Учитывая уравнения (1) и (2), находим, что структурные формы θ^A многообразия ☝(H), где