ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Ю.И.Ш е в ч е н к о

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено многообразие плоскостей. Введено понятие ассоциированного расслоения-главного расслоения, базой которого является само многообразие, а типовым слоем- подгруппа стационарности плоскости. Доказано, что оснащение Бортолотти позволяет задать связность в ассоциированном расслоении. Это расслоение содержит расслоение проективных реперов, для которого определяющая роль оснащения Бортолотти известна.

Аналогичный результат получен относительно сильного аффинного оснащения невырожденного многообразия центрированных плоскостей. Показано, что сильное аффинное оснащение можно представить в двух эквивалентных геометрических формах.

Работа выполнена методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева с применением предложенного им способа задания связностей в главных расслоениях.

§I. Оснащение Бортолотти многообразия плоскостей

Отнесем N -мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{I}'}\}$, инфинитезимальные перемещения которого

определяются формулами

$$dA_{\mathcal{I}'} = \theta_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{K}'} A_{\mathcal{K}'} \qquad (\mathcal{I}', \mathcal{J}', \mathcal{K}' = 0,1,\dots,N),$$

причем формы Пфаффа $\theta_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{K}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\theta_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{K}'} = \theta_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{J}'} \wedge \theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы

$$\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} = \theta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} - \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}\theta_0^0, \quad \omega^{\mathcal{I}} = \theta_0^{\mathcal{I}},$$
$$\omega_{\mathcal{I}} = \theta_{\mathcal{I}}^0 \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1,\dots,N),$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям (см. [1]-[3]):

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} + (\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}\omega_{\mathcal{J}} + \delta_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}\omega_{\mathcal{K}}) \wedge \omega^{\mathcal{J}},$$
$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}} \wedge \omega_{\mathcal{K}}.$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим r -мерное многообразие B_r $(1 \le r < (m+1)(N-m))$ m-мерных плоскостей L_m $(1 \le m < N)$. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины $A_0, A_1, \dots, A_m$ на плоскость L_m; здесь и в дальнейшем индексы принимают значения:

$$a, b, c = 1,\dots,m; \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1,\dots,N$$

Система дифференциальных уравнений многообразия B_r в параметрической форме имеет вид:

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \qquad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \tag{1}$$

где формы Пфаффа θ^i, заданные в некоторой области r -мерного пространства параметров S_r [4], удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j \quad (i, j = N+1, \dots, N+r). \qquad (2)$$

Продолжая систему уравнений (1), получим

$$\nabla\Lambda^\alpha_i - \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a = \Lambda^\alpha_{ij}\,\theta^j, \quad \nabla\Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_i\,\omega_a = \Lambda^\alpha_{aij}\,\theta^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ai} = d\Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_{aj}\,\theta^j_i - \Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^b_a + \Lambda^\beta_{ai}\,\omega^\alpha_\beta .$$

Система функций $\Lambda = (\Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai})$ является фундаментальным объектом первого порядка многообразия B_r относительно прямого произведения двух групп-подгруппы стационарности плоскости L_m и линейной группы с инвариантными формами

$$\bar\theta^i_j = \theta^i_j \,\big|_{\theta^i = 0} .$$

Обозначим через s число инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$, являющихся вторичными в рассматриваемом репере нулевого порядка, тогда

$$s = N^2 - Nm + m^2 + N + m .$$

С многообразием B_r ассоциируется главное расслоение $G_s(B_r)$ со структурными уравнениями (2) и следующими:

$$\mathcal{D}\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \theta^i \wedge \omega^a_i, \qquad (3)$$

$$\mathcal{D}\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + (\delta^a_b\,\omega_c + \delta^a_c\,\omega_b) \wedge \omega^c + \theta^i \wedge \omega^a_{bi}, \qquad (4)$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \qquad (5)$$

$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\beta\,\omega_a \wedge \omega^a + \theta^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i},$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta,$$

$$\mathcal{D}\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \omega_\alpha \wedge \omega^a,$$

где

$$\omega^a_i = \Lambda^\alpha_i\,\omega^a_\alpha, \qquad \omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^a_\alpha - \delta^a_b\,\Lambda^\alpha_i\,\omega_\alpha,$$

$$\omega_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega_\alpha, \qquad \omega^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a_\beta - \Lambda^\gamma_i\,(\delta^\alpha_\beta\,\omega_\gamma + \delta^\alpha_\gamma\,\omega_\beta)$$

Базой главного расслоения $G_s(B_r)$ является многообразие B_r (точнее-область пространства параметров S_r), а типовым слоем — s-членная подгруппа стационарности G_s плоскости L_m. Ассоциированное расслоение $G_s(B_r)$ содержит расслоение проективных реперов (2)-(5) с той же базой, типовым слоем которого является проективная группа $GP(m,R) \subset G_s \subset GP(N,R)$, действующая на плоскости L_m. В свою очередь расслоение проективных реперов содержит каноническое расслоение со структурными уравнениями (2), (3), введенное Ю.Г.Лумисте [2], [3].

Связность в главном расслоении $G_s(B_r)$ задается [5], [6] с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^a_i, \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma_{\alpha i}, \Gamma^a_{\alpha i})$$

на базе B_r:

$$\nabla\Gamma^a_i - \Gamma^a_{bi}\,\omega^b + \omega^a_i = \Gamma^a_{ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^a_{bi} + \delta^a_b\,(\Gamma_{ci}\,\omega^c - \Gamma^c_i\,\omega_c) + \Gamma_{bi}\,\omega^a - \Gamma^a_i\,\omega_b + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\,\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^\alpha_{\beta i} + \delta^\alpha_\beta\,(\Gamma_{ai}\,\omega^a - \Gamma^a_i\,\omega_a) + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{\alpha i} + \Gamma^a_{\alpha i}\,\omega_a + \Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega_\beta - \Gamma_{ai}\,\omega^a_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Gamma^a_{\alpha i} - \Gamma^a_{bi}\,\omega^b_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega^a_\beta - \Gamma^a_i\,\omega_\alpha + \Gamma_{\alpha i}\,\omega^a = \Gamma^a_{\alpha ij}\,\theta^j.$$

Т е о р е м а. Оснащение Бортолотти [9] многообразия B_τ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_S(B_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оснащение Бортолотти многообразия B_τ состоит в присоединении к каждой плоскости L_m $(N-m-1)$-мерной плоскости P_{N-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m. Плоскость P_{N-m-1} зададим системой точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A_0,$$

причем

$$\nabla \lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\,\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\,\theta^i,$$

$$\nabla \lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\,\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\,\theta^i.$$

Оснащение Бортолотти определяется полем квазитензора $\lambda = (\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha)$ на базе B_τ. Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^a_i = \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_i, \qquad \Gamma_{ai} = \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_{ai}, \tag{6}$$

$$\Gamma^a_{bi} = \lambda^a_\alpha \Lambda^\alpha_{bi} - \delta^a_b \Lambda^\alpha_i \lambda_\alpha, \tag{7}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta - \Lambda^\gamma_i(\delta^\alpha_\beta \lambda_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \lambda_\beta),$$

$$\Gamma_{\alpha i} = -\lambda_\beta M^\beta_{\alpha i}, \quad \Gamma^a_{\alpha i} = -\lambda^a_\beta M^\beta_{\alpha i},$$

где

$$M^\beta_{\alpha i} = \lambda^a_\alpha \Lambda^\beta_{ai} + \lambda_\alpha \Lambda^\beta_i.$$

З а м е ч а н и е 1. Главное расслоение, ассоциированное с пространством произвольных фигур, ввел В.С.Малаховский [7, с.196]. В случае многообразия Грассмана некоторые главные расслоения рассматривались И.В.Близникене [8].

З а м е ч а н и е 2. Охват объекта проективной связности $(\Gamma^a_i, \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}) \subset \Gamma$ по формулам (6),(7) осуществлен Ю.Г.Лумисте [2, с.21].

§ 2. Сильное аффинное оснащение невырожденного многообразия центрированных плоскостей

В проективном пространстве P_N рассмотрим τ-параметрическое многообразие B^*_τ $(1 \le \tau \le N)$ m-мерных центрированных плоскостей L^*_m $(1 \le m < N)$. Многообразие B^*_τ является наиболее общим невырожденным многообразием простых $(N-m)$-инцидентных пар фигур [7]: плоскости и принадлежащей ей точки. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершину A_0 в центр плоскости L^*_m, а вершины A_a – на плоскость L^*_m. Система дифференциальных уравнений многообразия B^*_τ имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda^a_i\,\theta^i, \quad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i\,\theta^i, \quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{ai}\,\theta^i \quad (i,j = 1,\dots,\tau). \tag{1}$$

Продолжая систему уравнений (1), получим

$$\nabla \Lambda^a_i + \Lambda^\alpha_i\,\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{ij}\,\theta^j, \quad \nabla \Lambda^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla \Lambda^\alpha_{ai} - \Lambda^\alpha_i\,\omega_a = \Lambda^\alpha_{aij}\,\theta^j.$$

Система функций $\Lambda = (\Lambda^a_i, \Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai})$ является фундаментальным объектом первого порядка многообразия B^*_τ. Пусть

$$S^* = N(N+1) - m(N-m).$$

С многообразием B^*_τ ассоциируется главное расслоение $G_{S^*}(B^*_\tau)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \theta^i \wedge \omega^a_{bi}, \tag{3}$$

$$\mathcal{D}\omega_a = \omega^b_a \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \tag{4}$$

$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \theta^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i},$$

$$\mathcal{D}\omega^a_\alpha = \omega^b_\alpha \wedge \omega^a_b + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega^a_\beta + \theta^i \wedge \omega^a_{\alpha i},$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^a_\alpha \wedge \omega_a + \omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\,\omega^a_\alpha - \delta^a_b(\Lambda^\alpha_i\omega_\alpha + \Lambda^c_i\omega_c) - \Lambda^a_i\,\omega_b,$$

$$\omega_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega_\alpha, \quad \omega^a_{\alpha i} = -\Lambda^a_i\,\omega_\alpha,$$

$$\omega^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^a_\beta - \Lambda^\alpha_i\,\omega_\beta - \delta^\alpha_\beta(\Lambda^\gamma_i\omega_\gamma + \Lambda^a_i\,\omega_a).$$

Базой главного расслоения $G_{S^*}(B^*_\tau)$ является многообразие B^*_τ, а слоем - S^*-членная подгруппа стационарности G_{S^*} центрированной плоскости L^*_m. Ассоциированное расслоение $G_{S^*}(B^*_\tau)$ содержит, в частности, расслоение коаффинных (центропроективных) реперов (2)-(4) с той же базой, слоем которого является коаффинная группа $GA^*(m,R) \subset G_{S^*} \subset G_S$, действующая в центрированной плоскости L^*_m.

Связность в главном расслоении $G_{S^*}(B^*_\tau)$ задается с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha i})$$

на базе B^*_τ:

$$\nabla\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{ai} + \Gamma^b_{ai}\,\omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^\alpha_{\beta i} + \omega^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma^a_{\alpha i} - \Gamma^a_{bi}\,\omega^b_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega^a_\beta + \omega^a_{\alpha i} = \Gamma^a_{\alpha ij}\,\theta^j,$$

$$\nabla\Gamma_{\alpha i} + \Gamma^\beta_{\alpha i}\,\omega_\beta + \Gamma^a_{\alpha i}\,\omega_a - \Gamma_{ai}\,\omega^a_\alpha = \Gamma_{\alpha ij}\,\theta^j$$

Т е о р е м а. Сильное аффинное оснащение [2] многообразия B^*_τ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_{S^*}(B^*_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Под сильным аффинным оснащением многообразия B^*_τ будем понимать присоединение к каждой центрированной плоскости L^*_m следующих геометрических образов: 1/ $(N-m-1)$-мерной плоскости P_{N-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m; 2/ $(m-1)$-мерной плоскости P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскости, указанные в пунктах 1/, 2/, определяются системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A_0, \quad B_a = A_a + \lambda_a A_0,$$

причем

$$\nabla\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\,\theta^i, \quad \nabla\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\,\theta^i,$$

$$\nabla\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\,\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\,\theta^i.$$

Фундаментальный объект первого порядка Λ и оснащающий квазитензор $\lambda = (\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a)$ позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma^a_{bi} = \Lambda^\alpha_{bi}\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha - M^c_i(\delta^a_b\lambda_c + \delta^a_c\lambda_b),$$

$$\Gamma_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai}\lambda_\alpha - \lambda_a\lambda_b M^b_i,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i} = \delta^\alpha_\beta(\Lambda^\gamma_i\lambda^a_\gamma\lambda_a - M_i) - \Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta - \Lambda^\alpha_i\lambda_\beta,$$

$$\Gamma^a_{\alpha i} = -\mu_\alpha\Lambda^a_i - \lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta(\Lambda^\beta_{bi} + \lambda_b\Lambda^\beta_i),$$

$$\Gamma_{\alpha i} = \lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha M^a_i - \mu_\beta\lambda^a_\alpha\Lambda^\beta_{ai} - \lambda_\alpha M_i,$$

где

$$M^a_i = \Lambda^a_i - \Lambda^\alpha_i\lambda^a_\alpha, \quad M_i = \Lambda^a_i\lambda_a + \Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha,$$

$$\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda^a_\alpha\lambda_a.$$

П р е д л о ж е н и е. Сильное аффинное оснащение многообразия B^*_r можно представить в другой геометрической форме, а именно, к каждой центрированной плоскости L^*_m присоединить: а/ $(N-m)$ -мерную плоскость P_{N-m}, пересекающую плоскость L^*_m лишь в ее центре; б/ гиперплоскость P_{N-1}, не проходящую через центр плоскости L^*_m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскости, указанные в пунктах а/, б/, зададим уравнениями

$$x^a - \lambda^a_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^0 - \lambda_a x^a - \mu_\alpha x^\alpha = 0,$$

причем

$$\nabla\mu_\alpha - \lambda_a\omega^a_\alpha + \omega_\alpha = \mu_{\alpha i}\Theta^i.$$

Плоскость P_{N-m} натянута на плоскость P_{N-m-1} и центр плоскости L^*_m, а гиперплоскость P_{N-1} – на плоскости P_{N-m-1}, P_{m-1}. Обратно, гиперплоскость P_{N-1} высекает на плоскости P_{N-m} подплоскость P_{N-m-1}, а на плоскости L^*_m -подплоскость P_{m-1}.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Тр.Моск.матем.о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях.-"Учен.зап.Тартуск. ун-та", вып.177, 1965, с.6-41.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.-"Матем.сб.", 1973, т.91, № 2, с.211-233.

4. О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей.-"Тр.геометрического семинара", 1969, т.2, с.247-262.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-"Тр.4-го Всесоюзного матем.съезда", т.2, Л., Изд-во "Наука", 1964, с.226-233.

6. О с т и а н у Н.М., Р ы ж к о в В.В., Ш в е й к и н П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр. геометрического семинара, 1973, т.4, с.7-68.

7. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-"Тр.геометрич.семинара", 1969, т.2, с.179-206.

8. Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии полунеголономной конгруэнции первого рода.-"Тр.геометрич.семинара", 1971, т.3, с.125-148.

9. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.