УДК 514.764.25

Т.В. Зудина, С.Е. Степанов

*(Владимирский государственный
педагогический университет)*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭКВИАФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть M будет дифференцируемым n-мерным многообразием с эквиаффинной SL(n, **R**)-структурой, которая определяется как пара (ω,∇), где ω — элемент объема SL(n, **R**)-структуры и ∇ — линейная связность без кручения такие, что $\nabla\omega = 0$. Диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ многообразий M и $\overline{M}$ размерностей n с эквиаффинными SL(n, **R**)-структурами (ω,∇) и $(\overline{\omega},\overline{\nabla})$ назван эквиаффинным, если $f^*\overline{\omega}$ принадлежит SL(n, **R**)-структуре многообразия M. Эквиаффинный диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ характеризуется равенством $trace(\overline{\nabla} - \nabla) = 0$. Ниже описана геометрия одного из семи найденных ранее классов эквиаффинных отображений.

Введение

SL(n, **R**)-структуры в списке классических G-структур на n-мерных многообразиях стоят сразу после естественно определяемых GL(n, **R**)-структур [1, с. 12—13]. Известно, что каждая SL(n, **R**)-структура задает на n-мерном связном многообразии M однозначно с точностью до постоянного множителя C нигде не обращающуюся в нуль n-форму $\omega \in C^\infty \Lambda^n M$, и обратно, каждой n-форме $\omega \in C^\infty \Lambda^n M$ соответствует однозначно определенная SL(n, **R**)-структура [2, с. 196]. На этом основании нигде на M не обращающуюся в нуль n-форму $\omega \in C^{\infty}\Lambda^{n}M$ называют еще SL(n, **R**)-структурой [1, с. 36].

Известна проблема сопоставления с каждой G-структурой, заданной на многообразии M, однозначно определенной сводимой к G линейной связности ∇ (см. [3]). Линейная связность без кручения ∇ , сводимая к SL(n, **R**), называется *эквиаффинной* и характеризуется условием $\nabla\omega = 0$. Пару (∇, ω) назовем *эквиаффинной* SL(n, **R**)-*структурой* на многообразии M, а геометрию многообразия M с эквиаффинной структурой по предложению К. Номидзу — аффинной дифференциальной геометрией [4; 5].

В настоящей статье мы продолжим начатое в работах [6] и [7] изучение геометрии эквиаффинных отображений многообразий.

§ 1. Эквиаффинные отображения

Пусть имеются два n-мерных связных многообразия M и M' с эквиаффинными SL(n, **R**)-структурами (∇, ω) и (∇', ω') соответственно. Тогда диффеоморфизм $f : M \to M'$ назовем *эквиаффинным отображением*, если n-форма $f^{*}(\omega')$ принадлежит SL(n, **R**)-структуре многообразия M, т.е. $f^{*}(\omega') = C\omega$ для постоянной $C > 0$. Последнее, как нетрудно установить, выполняется тогда и только тогда, когда тензор деформации $T = \nabla' - \nabla$ связности ∇ в связность ∇' удовлетворяет условию $trace\ T = 0$. В частности, эквиаффинные отображения включают в себя эквиобъемные отображения $f : M \to M'$ многообразий с SL(n, **R**)-структурами, для которых согласно определению $\omega = f^{*}(\omega')$.

Тензор деформации T произвольного диффеоморфизма $f : M \to M'$ многообразий с эквиаффинными SL(n, **R**)-структурами (∇, ω) и (∇', ω') соответственно допускает GL(n, **R**)-инвариантное разложение вида

$$T = W + \frac{1}{n+1}\left(trace\,T \otimes Id_M + Id_M \otimes trace\,T\right)$$

с «бесследовой» вейлевой компонентой разложения W и «следовой» компонентой $T' = \frac{1}{n+1}\left(trace\,T \otimes Id_M + Id_M \otimes trace\,T\right)$, которая совпадает с тензором деформации связностей при проективном отображении [8, с. 166]. В результате диффеоморфизм $f : M \to M'$ представим в виде композиции эквиаффинного отображения $f'' : M \to M''$ на некоторое n-мерное многообразие M'' с эквиаффинной SL(n, **R**)-структурой $\left(\nabla'', \omega''\right)$ для формы объема $\omega'' = C''\omega$ с постоянной $C'' > 0$ и эквиаффинной связностью $\nabla'' = \nabla + W$ и проективного отображения $f' : M'' \to M'$, где, как нетрудно установить, $\nabla' = \nabla'' + T'$ и $traceT' = grad\left[ln\,\omega'/\omega\right]$.

В случае эквиаффинного отображения $f : M \to M'$ многообразий с эквиаффинными SL(n, **R**)-структурами $\left(\nabla, \omega\right)$ и $\left(\nabla', \omega'\right)$ соответственно для произвольного векторного поля X на M и поля $X' = f_* X$ на M' справедливо равенство $div\,X = divX'$. Действительно, непосредственные вычисления показывают, что $trace\left(\nabla' X'\right) = trace\left(\nabla X\right) + \left(trace\,T\right)X$, $divX = trace\left(\nabla X\right)$ и $divX'$ $= trace\left(\nabla' X'\right)$ в случае эквиаффинных связностей ∇ и ∇' [9, с. 259]. А благодаря теореме Грина $\int_M \left(divX\right)\omega = 0$, справедливой для компактного многообразия M с эквиаффинной SL(n, **R**)-структурой $\left(\nabla, \omega\right)$ [9, с. 260], в качестве следствия имеем равенство $\int_M \left(divX\right)\omega = \int_{M'} \left[div\left(f_* X\right)\right]\omega'$.

§ 2. Субгеодезические эквиаффинные отображения

В случае эквиаффинного отображения $f : \left(M, g\right) \to \left(M', g'\right)$ псевдоримановых многообразий тензорное поле T^*, определяемое для $X, Y, Z \in C^\infty TM$ условием $T^*(X, Y, Z) = g(X, T(Y, Z))$, допускает поточечно неприводимое разложение на три компоненты. Вследствие этого можно инвариантным образом выделить семь классов такого рода отображений [7], как это было сделано в случае с гармоническими диффеоморфизмами [10].

Рассмотрим эквиаффинное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ одного из семи выделенных в работе [7] классов, которое в локальных координатах принимает вид следующих равенств:

$$T_{ij}^{k}=\frac{1}{n^2+n-2}\left[(n+1)\theta^k g_{ij}-\theta_i\delta_j^k-\theta_j\delta_i^k\right]. \qquad (*)$$

Непосредственно проверяется здесь, что $traceT=0$ и при этом тензор g по отношению к связности Леви-Чивита ∇' является *обобщенно киллинговым* и *обобщенно кодацциевым* одновременно [8, с. 176, 186].

Для того чтобы еще как-то охарактеризовать подобного вида эквиаффинное отображение, напомним некоторые понятия. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma\subset M$ и обозначим через $\dot{\gamma}$ ее касательное векторное поле. Кривая $\gamma\subset M$ называется *субпланарной* [11], если для каждой точки $x\in\gamma$ ее касательный вектор $\dot{\gamma}_x$ при параллельном перенесении его вдоль кривой в точку кривой $x'=x+dx$ окажется в *2*-мерном подпространстве из $T_{x'}M$, натянутом на $\dot{\gamma}_{x'}$ и некоторый вектор $\xi_{x'}$, т.е. $\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right)_{x'}=\lambda(x')\dot{\gamma}_{x'}+\mu(x')\xi_{x'}$ для гладких функций λ и μ, заданных в точках кривой $\gamma\subset M$. Диффеоморфное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ называют *субгеодезическим* [12], если любая субпланарная кривая из (M,g) при таком отображении перейдет в субпланарную кривую из $(\overline{M},\overline{g})$. Это возможно тогда и только тогда [11], когда в общей по отображению системе координат $x^1,\ \dots\ ,x^n$ выполняются равенства $\overline{\Gamma}_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k+\delta_i^k\varphi_j+\delta_j^k\varphi_i+\xi^k a_{ij}$ для некоторых ковекторного поля φ с локальными компонентами φ_i и симметрического тензорного поля a с локальными компонентами a_{ij}. Заключаем, что эквиобъемное отображение класса $(*)$ является субгеодезическим отображением.

Более того, эквиаффинное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ переводит изотропные геодезические из (M,g) в геодезические из $(\overline{M},\overline{g})$, т.е. в общей по отображению системе координат из условий $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\lambda\,\dot{\gamma}$ и $g(\dot{\gamma},\ \dot{\gamma})=0$ с необходимостью следует, что $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\overline{\lambda}\,\dot{\gamma}$. Действительно, для произвольной изотропной геодезической $\gamma\subset M$ с учетом равенств (*) имеем $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\left(\lambda-\frac{2}{n^2+n-2}\theta(\dot{\gamma})\right)\dot{\gamma}$.

Теорема. *Эквиаффинное отображение* $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ *класса* $(*)$ *псевдориманова многообразия* $(M,\ g)$ *на некоторое псевдориманово многообразие* $(\overline{M},\ \overline{g})$ *является субгеодезическим отображением, переводящим изотропные геодезические многообразия* $(M,\ g)$ *в геодезические многообразия* $(\overline{M},\ \overline{g})$.

В статье [12] для случая, когда $a_{ij}=g_{ij}$ в $(*)$, указан канонический вид, к которому можно привести метрические формы $ds^2=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ и $d\overline{s}^2=\overline{g}_{ij}dx^i\otimes dx^j$ римановых многообразий $(M,\ g)$ и $(\overline{M},\overline{g})$ при условии, что среди корней уравнения $det\left(\overline{g}_{ij}-r^2g_{ij}\right)=0$ имеется n различных. Точнее: если на открытом всюду плотном подмножестве $M_{\overline{g}}\subset M$ число различных собственных значений оператора $G_i^k=g^{kj}\overline{g}_{ji}$ постоянно и равно n, то метрические формы многообразий $(M,\ g)$ и $(\overline{M},\ \overline{g})$ в общей по отношению к данному отображению $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ системе локальных координат $x^1,\ \dots\ ,x^n$ приводятся к виду

$$ds^2 = e^{2\xi\left(x^1,\ldots,x^n\right)}\left\{a_1\left(x^1\right)z'\left(x^1\right)\left(dx^1\right)^2 + \ldots + a_n\left(x^n\right)z'\left(x^n\right)\left(dx^n\right)^2\right\};$$

$$d\overline{s}^2 = \left(x^1 \ldots x^n\right)^{-1}\left\{\left[a_1\left(x^1\right)z'\left(x^1\right)/\left(x^1\right)\right]\left(dx^1\right)^2 + \ldots + \left[a_n\left(x^n\right)z'\left(x^n\right)/\left(x^n\right)\right]\left(dx^n\right)^2\right\},$$

где $\xi_i = \partial_i \xi$; $(n+1)\theta_i + \xi_i = 2^{-1}\partial_i\left(ln\left(det\,\overline{g}/det\,g\right)\right)$ и $z(x) = \left(x - x^1\right) \ldots \left(x - x^n\right)$. В итоге будет справедливым

Следствие. *Пусть* $f:(M,g)\to\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *— эквиобъемное отображение класса* $\Im_3$ *риманова многообразия* $(M,\ g)$ *на риманово многообразие* $\left(\overline{M},\ \overline{g}\right)$ *и тензор* $\overline{g}$ *на связной компоненте множества* $M_{\overline{g}} \subset M$ *обладает n различными собственными функциями. Тогда метрические формы* $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ *и* $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j$ *многообразий данных многообразий в общей по отношению к отображению* $f:(M,g)\to\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *системе локальных координат* $x^1,\ \ldots\ ,x^n$ *приводятся к виду*

$$ds^2 = e^{2\theta\left(x^1,\ldots,x^n\right)}\left\{a_1\left(x^1\right)z'\left(x^1\right)\left(dx^1\right)^2 + \ldots + a_n\left(x^n\right)z'\left(x^n\right)\left(dx^n\right)^2\right\};$$

$$d\overline{s}^2 = \left(x^1 \ldots x^n\right)^{-1}\left\{\left[a_1\left(x^1\right)z'\left(x^1\right)/\left(x^1\right)\right]\left(dx^1\right)^2 + \ldots + \left[a_n\left(x^n\right)z'\left(x^n\right)/\left(x^n\right)\right]\left(dx^n\right)^2\right\},$$

где $\xi_i = \partial_i \xi$; $(n+1)\theta_i + \xi_i = 2^{-1}\partial_i\left(ln\left(det\,\overline{g}/det\,g\right)\right)$ и $z(x) = \left(x - x^1\right) \ldots \left(x - x^n\right)$.

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

3. *Chern S.S.* The geometry of G-structures // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 72. P. 167—219.

4. *Nomizu K., Sasaki T.* Affine differential geometry. Cambridge, 1994.

5. *Nomizu K.* On completeness in affine differential geometry // Geometriae Dedicata. 1986. Vol. 20. № 1. P. 43—49.

6. *Зудина Т.В., Степанов С.Е.* Эквиаффинные отображения псевдоримановых многообразий // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 48—55.

7. *Stepanov S.E.,* The seven classes of equiaffine mappings of pseudo-Riemannian manifolds // Abstracts of 9th International Conference on Differential Geometry and Applications. Prague, 2004. P. 46—47.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

10. *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Семь классов гармонических диффеоморфизмов // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 752—761.

11. *Yano K.* Union curves and subpaths // Math. J. 1948. Vol. 1. P. 51—59.

12. *Nicolescu Liviu.* Les espaces de Riemann en representation subgeodesique // Tensor, N.S. 1978. Vol. 32. № 2. P. 182—187.

T. Zudina, S. Stepanov

ON A CLASS OF EQUIAFFINE MAPS

Let M be a differentiable manifold with an equiaffine SL(n, **R**)-structure that is a pair (ω, ∇) where ω is a volume element of SL(n, **R**)-structure and ∇ is a linear connection with zero torsion such that $\nabla\omega = 0$. The diffeomorphism $f : M \to \overline{M}$ between two manifolds M and $\overline{M}$ of dimension n with equiaffine SL(n, **R**)-structures is said to be equiaffine if $f^*\overline{\omega}$ belongs to SL(n, **R**)-structure of M. It turns out that f is equiaffine if and only if $trace(\overline{\nabla} - \nabla) = 0$. We have given several examples and applications of these definition and result.