УДК 514.76

О.П. Сурина
(Пензенский государственный педагогический университет)

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ЭКСТРЕМАЛИ ЛОКАЛЬНО КОНИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе [1] введено понятие локально конического пространства K^n и вычислены коэффициенты связности Картана. В настоящей работе мы устанавливаем, что геодезические локально конического пространства в связности Картана совпадают с экстремалями.

Обобщенное финслерово пространство называется локально коническим пространством K^n, если метрический тензор этого пространства имеет вид [1]

$$g_{ij}(x,y)=\gamma_{ij}(x)+a^2(x)\frac{\gamma_{ip}(x)\gamma_{js}(x)y^p y^s}{\gamma_{ps}(x)y^p y^s}, \qquad (1)$$

где $\gamma_{ij}(x)$ – компоненты риманова метрического тензора базисного многообразия M; $a(x)$ – скалярная функция на M; (x^i) – локальные координаты на M; (x^i, y^i) – естественные локальные координаты на TM.

Введем следующие обозначения: $y_i=\gamma_{ip}y^p$, $y_o=\gamma_{ps}y^p y^s$, тогда выражение (1) примет вид:

$$g_{ij}=\gamma_{ij}+a^2\frac{y_i y_j}{y_o}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$g^{ij}=\gamma^{ij}-\frac{a^2}{a^2+1}\frac{y^i y^j}{y_o}$$

являются контрвариантными компонентами метрического тензора, а

$$g_{ij\bullet k}=\frac{a^2}{y_o}\left\{\gamma_{ik}y_j+\gamma_{jk}y_i-2\frac{y_i y_j y_k}{y_o}\right\};$$

$$g_{oj\bullet k} = a^2(\gamma_{jk} - \frac{y_j y_k}{y_o}),\ g_{oo\bullet k} = 0.$$

Ассоциированное финслерово пространство F^n *является римановым, метрика которого конформна метрике* γ_{ij}. Фундаментальная функция и метрический тензор пространства F^n имеют вид:

$$F = \frac{1}{2}(a^2+1)\gamma_{ij} y^i y^j,\ f_{ij} = (a^2+1)\gamma_{ij}.$$

Определитель метрического тензора локально конического пространства не зависит от координат касательного вектора, так как.

$$(det\|g_{ij}\|)_{\bullet k} = det\|g_{ij}\| g^{ps} g_{ps\bullet k} = 0,$$

потому что $g^{ps} g_{ps\bullet k} = 0$.

Это свойство метрического тензора позволяет в локально коническом пространстве инвариантным образом определить элемент объема.

Кривая $c: x^i = x^i(t), a \le t \le b$ называется экстремалью пространства K^n, если она является экстремалью функционала

$$I = \int_a^b \|\dot{x}\|^2 dt, \tag{2}$$

где $\|\dot{x}\|^2 = g_{ij}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)$ – квадрат длины касательного вектора $\dot{x} = \frac{dx^i}{dt}\partial_i$. Так как для метрики (1)

$$\|\dot{x}\|^2 = 2F = (a^2+1)\gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

то уравнения Эйлера-Лагранжа экстремалей примут вид:

$$\ddot{x}^k + G^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \tag{3}$$

где

$$G^k_{ij} = \frac{1}{2} f^{ks}(\partial_i f_{sj} + \partial_j f_{is} - \partial_s f_{ij}). \tag{4}$$

Коэффициенты связности Картана были вычислены в работе [1]. Они имеют вид:

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2(a^2+1)y_o}(y^k y_j \partial_i a^2 + y^k y_i \partial_j a^2 - y_i y_j \gamma^{kp} \partial_p a^2). \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (5) можно представить в виде

$$\Gamma_{ij}^{*k} = G_{ij}^k + \frac{1}{2(a^2+1)y_o}\left\{\left(\frac{y^k y_j}{y_o} - \delta_j^k\right)\partial_i a^2 + \left(\frac{y^k y_i}{y_o} - \delta_i^k\right)\partial_j a^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{y_i y_j}{y_o} - \gamma_{ij}\right)\gamma^{kp}\partial_p a^2\right\}. \qquad (6)$$

Свернув (6) с y^j, будем иметь

$$\Gamma_{io}^{*k} = G_{io}^k + \frac{1}{2(a^2+1)y_o} y^p \partial_p a^2 \left(\frac{y^k y_i}{y_o} - \delta_i^k\right). \qquad (7)$$

Отсюда следует, что связность $N_i^k = \Gamma_{io}^{*k}$, порожденная связностью Картана, является нелинейной. Эта связность будет линейной тогда и только тогда, когда $a(x) = const$.

Дифференциальные уравнения геодезических в связности Картана имеют вид:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^{*k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0. \qquad (8)$$

Свернув (7) с y^i получим

$$\Gamma_{oo}^{*k} = G_{oo}^k. \qquad (9)$$

Это означает, что уравнения (3) и (8) совпадают, т. е. *совпадают геодезические и экстремали локально конического пространства* K^n.

Список литературы

1. *Паньженский В.И.* Исследование локально конических многообразий с помощью соприкасающихся римановых метрик // Геометрия погруженных многообразий. М.: МГПИ, 1986. С. 65 – 70.

O. Surina

GEODEZICAL AND EXTREMALS LOCCALY CONICAL SPACE

Loccaly conical space is generalized Finsler spaces with the metric tenzor

$$g_{ij}(x,y) = \gamma_{ij}(x) + a^2(x)\frac{\gamma_{ip}(x)\gamma_{js}(x)y^p y^s}{\gamma_{ps}(x)y^p y^s},$$

where $\gamma_{ij}(x)$ – Riemannian metrical tensor; $a(x)$ – scalar function. Proff, what geodezical in Cartan connection coincide with extremals loccaly conical space.

УДК 514.75

R. Fritsch
(Ludwig-Maximilians-Universität München)

HILBERTS BEWEIS DER TRANSZENDENZ DER LUDOLPHSCHEN ZAHL π

Im Jahr 1882 hat Ferdinand Lindemann (1852 – 1939, damals Professor in Freiburg im Breisgau) das Problem der Quadratur des Kreises erledigt, indem er die Transzendenz der Ludolphschen Zahl π bewies. Dadurch wurde er weltberühmt und an die im 19. Jahrhundert ein mathematisches Zentrum von Weltgeltung bildende Albertina in Königsberg berufen. Sein ursprünglicher Beweis ist heute nur schwer nachzuvollziehen. Im Jahr 1893 gelang seinem aus Königsberg stammenden und zu dem Zeitpunkt noch hier wirkenden Schüler David Hilbert (1862 – 1943) eine wesentliche Vereinfachung des Beweises. Damit hat die Transzendenz von π einen starken lokalen Bezug zum Erscheinungsort dieser Zeitschrift, was rechtfertigt, die Grundideen von Hilberts Beweis hier darzustellen.

Zur Erinnerung. Eine komplexe Zahl z heißt *algebraisch*, wenn sie Wurzel eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, oder gleichbedeutend, Wurzel eines normierten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. Die erste Formulierung bedeutet: es gibt eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, derart dass gilt:

$$a_n \neq 0\,, \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0.$$

Für $z \neq 0$ kann dabei auch immer $a_0 \neq 0$ angenommen werden. Die Zahl z heißt *ganz algebraisch*, wenn sie Wurzel eines normierten Polynoms mit ganzen Koeffizienten ist, das heißt, $a_n = 1$ gewählt werden kann und die übrigen Koeffizienten trotzdem ganz bleiben.

Lemma 1. *Ist die komplexe Zahl z algebraisch und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, die die genannten Bedingungen erfüllen, so ist $a_n z$ ganz algebraisch.*