УДК 514.124

Е. М. Шемякина[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
shemyakina_1982@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8071-055X
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-19

Пучки окружностей, базисными элементами которых являются прямая и окружность

Исследуются пучки окружностей, базисными элементами которых являются прямая и окружность. Рассматриваются три случая расположения базисных прямой и окружности: когда прямая не пересекает окружность, когда прямая и окружность имеют одну общую точку и когда прямая пересекает окружность в двух точках. Вводится параметр и записываются уравнения новых пучков. С помощью математических преобразований полученные уравнения приводятся к каноническому уравнению окружности. Рассматриваемому параметру придаются различные значения и строятся окружности, входящие в новые пучки. На основе полученных графиков делается вывод, что пучок с непересекающимися базисными прямой и окружностью образует гиперболический пучок окружностей, пучок с базисными прямой и окружностью, имеющими одну общую точку, образует параболический пучок окружностей, а пучок с пресекающимися базисными прямой и окружностью образует эллиптический пучок окружностей.

Ключевые слова: окружность, гиперболический, параболический и эллиптический пучки окружностей.

Поступила в редакцию 31.05.2019 г.

1. Гиперболический пучок окружностей с непересекающимися базисными линиями

Выберем окружность с центром в начале координат и радиусом r и прямую $y = b$, причем прямая и окружность не пересекаются, то есть $b > r > 0$ (рис. 1).

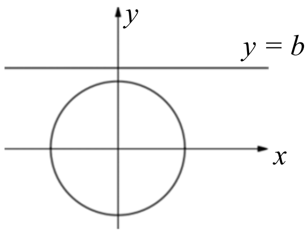

Рис. 1. Расположение базисных элементов пучка

Рассмотрим пучок с базисными окружностью $x^2 + y^2 = r^2$ и прямой $y = b$. Тогда уравнение пучка имеет вид

$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda(y-b)^2 = 0.$$

Добавим и вычтем $\frac{\lambda^2}{4}$ для того, чтобы выделить полный квадрат:

$$x^2 + \left(y^2 + 2y\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4}\right) - \frac{\lambda^2}{4} - r^2 - \lambda b = 0.$$

Выделим квадрат суммы и перенесем в правую часть остальные слагаемые, чтобы прийти к аналогу уравнения окружности

$$x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + \lambda b + \frac{\lambda^2}{4}. \qquad (1)$$

Введем новую переменную $A = r^2 + \lambda b + \frac{\lambda^2}{4}$. Обозначим

$$R = \sqrt{A} = \sqrt{r^2 + \lambda b + \frac{\lambda^2}{4}}\,. \tag{2}$$

Вернемся к уравнению (1), которое примет вид

$$x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = R^2\,. \tag{3}$$

Утверждение 1. *При* $A > 0$ *пучок с непересекающимися базисными прямой и окружностью состоит из окружностей (3) с радиусами (2) и центрами в точках* $C\left(0; -\frac{\lambda}{2}\right)$.

Если $A > 0$, то есть $r^2 + \lambda b + \frac{\lambda^2}{4} > 0$, то уравнение (3) задает гиперболический пучок окружностей.

Если $A = 0$, тогда уравнение пучка примет вид

$$x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0\,,$$

то есть окружность превращается в точку с координатами $\left(0; -\frac{\lambda}{2}\right)$.

Если $A < 0$, то есть $r^2 + \lambda b + \frac{\lambda^2}{4} < 0$, уравнение (3) противоречиво.

Теорема 1. *Пучок линий с непересекающимися базисными прямой и окружностью является гиперболическим пучком окружностей* [1, с. 80] (рис. 2).

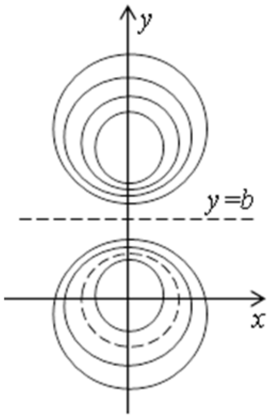

Рис. 2. Гиперболический пучок окружностей

2. Параболический пучок окружностей с касающимися базисными прямой и окружностью

Выберем окружность с центром в начале координат и радиусом r и прямую $y = r$, тогда прямая и окружность имеют одну общую точку (рис. 3).

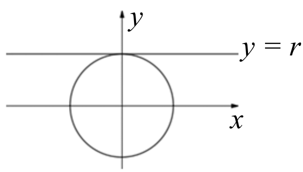

Рис. 3. Расположение базисных элементов пучка

Рассмотрим пучок с базисными линиями $x^2 + y^2 = r^2$ и прямой $y - b = 0$ [3, с. 70]. Уравнение пучка примет вид

$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda(y - b)^2 = 0.$$

Выполняя преобразования, аналогичные рассмотренным выше, получим уравнение окружности

$$x^2+\left(y+\frac{\lambda}{2}\right)^2=\left(r+\frac{\lambda}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Если $\lambda=-2r$, то уравнение (4) задает точки с координатами $(0;r)$.

Теорема 2. *Пучок с базисными прямой и окружностью, имеющими одну общую точку, есть параболический пучок окружностей* [2, с. 86] (рис. 4).

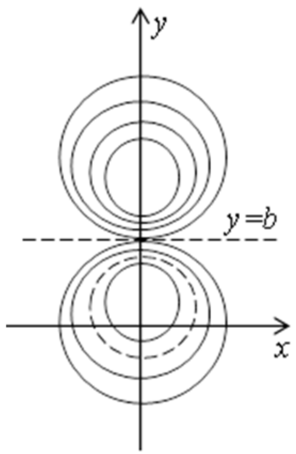

Рис. 4. Параболический пучок окружностей

3. Эллиптический пучок окружностей с пересекающимися базисными прямой и окружностью

Выберем окружность с центром в начале координат и радиусом r и прямую $y=b$, причем прямая пересекает окружность в двух точках при $0\le b<r$ (рис. 5).

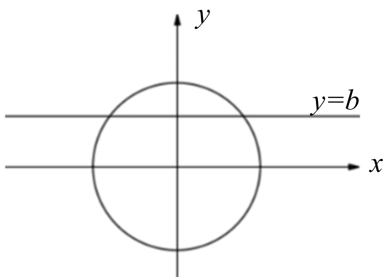

Рис. 5. Расположение базисных элементов пучка

Рассмотрим уравнение пучка с базисными линиями $x^2 + y^2 = r^2$ [4, с. 112] и прямой $y - b = 0$, уравнение пучка примет вид (3).

Утверждение 2. *Пучком с базисными окружностью и пересекающей ее прямой будет множество окружностей (1), которые существуют при любых значениях* λ *и имеют центры в точках* $C\left(0; -\frac{\lambda}{2}\right)$ *и радиус (2).*

Теорема 3. *Кривые пучка с пересекающимися базисными прямой и окружностью образуют эллиптический пучок окружностей* [1, с. 82] (рис. 6).

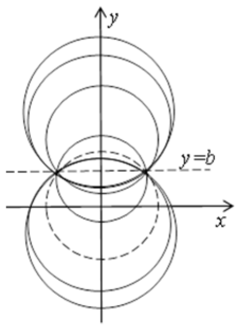

Рис. 6. Эллиптический пучок окружностей

Выделим частный случай эллиптического пучка окружностей. Выберем прямую $y = 0$. Прямая и окружность имеют две точки пересечения, причем прямая проходит через центр окружности. Тогда уравнение пучка примет вид

$$x^2 + \left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4}.$$

Откуда непосредственно видно, что уравнение пучка определяет окружности при любых λ.

Список литературы

1. *Аргунов Б.И.* Геометрические построения на плоскости. М., 2013.
2. *Киселев А.П.* Элементарная геометрия. М., 2013.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М., 1974.
4. *Смирнов Ю.М.* Курс аналитической геометрии. М., 2005.

E. Shemyakina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
shemyakina_1982@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8071-055X
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-19

Pencils of circles with a straight line and circle as the basic elements

Submitted on May 31, 2019

Pencils of circles with are a straight line and a circle as the basic elements are investigated. Three cases of arrangement of a basic straight line and a circle are considered: when the straight line does not intersect a circle, when the straight line and a circle have one generic point, and when the straight line intersects a circle in two points. A parameter is entered and the equations of new pencils of circles are registered. By means of mathematical manipulations the obtained equations are given to the

initial equation of a circle. Different values are attached to the parameter and the circles belonging to new pencils are constructed. Based on the obtained graphs it is concluded that the pencil with not intersecting basic straight line and a circle forms a hyperbolic pencil of circles, a pencil with a basic straight line and a circle having one generic point forms a parabolic pencil, and a pencil with the intersecting basic straight line and a circle forms an elliptic pencil.

Keywords: circle, hyperbolic pencil of circles, parabolic pencil of circles, elliptic pencil of circles.

References

1. *Argunov, B.I.:* Geometric construction on the plane. Moskow (2013) (in Russian).

2. *Kiselev, A.P.:* Elementary geometry. Moskow (2013) (in Russian).

3. *Korn, G., Korn, T.:* Handbook of mathematics. Moskow (1974) (in Russian).

4. *Smirnov, Yu. M.:* Course of analytical geometry. Moskow (2005) (in Russian).