$$x^{n+1} - K_{\hat a}\, x^{\hat a} = 0, \qquad (3.3$$
$$x^{\check\alpha} = 0.$$

Назовем вектор $(\mathcal{L}^{\hat c})$ главным. Он определяет в ассоциированно подпространстве инвариантную точку $\bar A = \mathcal{L}^{\hat c}\bar A_{\hat c}$. Действительно

$$\delta \bar A = \left(\frac{2}{n}\pi^{\alpha}_{\alpha} - \pi^{n+1}_{n+1}\right)\bar A. \qquad (3.4$$

Пересечение нормали второго рода поверхности S_h с гиперплоскостью $x^{n+1} = 0$ является $(h-1)$ мерной полярой $K_{\hat a} x^{\hat a} = 0$, $x^{\check\alpha} = 0$, $x^{n+1} = 0$ точки $\bar A = \mathcal{L}^{\hat c}\bar A_{\hat c}$ относительно ассоцииро ванного подпространства.

Литература

I. В.С. Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., вып. 3 (Труды Томско университета, 168) 1963, 28-42.

2. В.С. Малаховский, Дифференциальная геометрия многообразий фигу и пар фигур в однородном пространстве. Труды геометрического семинара, М., ВИНИТИ АН СССР, 1969, 179-206.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
вып 2 1971

П О Х И Л А М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Случай пары с общими гиперплоскостями)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается пара $T_{h,n}$ многообразий квадратичных элементов [I] с общими гиперплоскостями. Найден основной фундаментальный объект пары $T_{h,n}$. Исследованы различные поля геометрических объектов этой пары и геометрически охарактеризованы некоторые из них. Исследуется частный класс пар $T_{2,3}$ в P_3 (расслояемая пара $\overset{\circ}{T}_{2,3}$ конгруэнций коник).

§ I. Основной внутренний объект пары многообразий $T_{h,n}$.

Пусть $(\Phi_1), (\Phi_2)$ — пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

Определение I. Парой $T_{h,n}$ многообразий $(\Phi_1), (\Phi_2)$ будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$ [I], у которой гиперплоскости соответствующих локальных квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 совпадают.

Проективное пространство P_n размерности $n \geqslant 3$ отнесем к под-

вижному реперу $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n+1}\}$. Инфинитиземальное переме-
щение репера определяется уравнениями

$$d\bar{A}_\lambda = \omega^\eta_\lambda \bar{A}_\eta, \qquad (1.$$

причем формы Пфаффа ω^η_λ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega^\eta_\lambda = \omega^\nu_\lambda \wedge \omega^\eta_\nu. \qquad (1.$$

Здесь индексы $\lambda, \eta, \nu, \lambda_1 \dots$ принимают значения $1, 2, \dots, n+$ а индексы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \dots$ — значения $1, 2, \dots, n$. Если вершины репера расположить в гиперплоскости квадратичного элемента Φ то уравнения квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \qquad (1.$$

$$A_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \qquad (1.$$

где

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1, \ \det(A_{\alpha\beta}) = 1, \ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \ A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}. \qquad (1$$

Полагая, как и в [1],

$$\omega^{n+1}_\alpha = \omega_\alpha, \qquad (1$$

приведем систему дифференциальных уравнений пары к виду:

$$\omega_a = a^i_a \omega_i, \ \Delta a_{\alpha\beta} = b^i_{\alpha\beta}\omega_i, \ \Delta A_{\alpha\beta} = B^i_{\alpha\beta}\omega_i, \qquad (1$$

где индексы $i, j, p, q = 1, 2, \dots, h$; $a, b, c = h+1, \dots, n$; $h \le n$.

Имеем в силу (1.5)

$$a^{\alpha\beta} b^i_{\alpha\beta} = 0, \ A^{\alpha\beta} B^i_{\alpha\beta} = 0. \qquad (1$$

Замыкая систему (1.7), получим:

$$\Delta a^i_a \wedge \omega_i = 0, \ \Delta b^i_{\alpha\beta} \wedge \omega_i = 0, \ \Delta B^i_{\alpha\beta} \wedge \omega_i = 0, \qquad (1$$

где

$$\Delta a^i_a = da^i_a + a^j_a \omega^i_j - a^i_b \omega^b_a + a^j_a a^i_b \omega^b_j - \omega^i_a,$$

$$\Delta b^i_{\alpha\beta} = \nabla b^i_{\alpha\beta} + b^i_{\alpha\beta}\left(\frac{2}{n}\omega^\gamma_\gamma - \omega^{n+1}_{n+1}\right) + a^i_a b^j_{\alpha\beta} \omega^a_j + \qquad (1$$

$$+ \frac{2}{n} a_{\alpha\beta}(\omega^i_{n+1} + a^i_a \omega^a_{n+1}) - (\delta^i_\alpha + \delta^a_\alpha \omega^i_a) a_{\gamma\beta} \omega^\gamma_{n+1} - (\delta^i_\beta + \delta^a_\beta a^i_a) a_{\alpha\gamma} \omega$$

и аналогичное выражение для $\Delta B^i_{\alpha\beta}$. Учитывая (1.8), имеем тождества

$$a^{\alpha\beta} \Delta b^i_{\alpha\beta} \wedge \omega_i = 0, \ A^{\alpha\beta} \Delta B^i_{\alpha\beta} \wedge \omega_i = 0. \qquad (1.11)$$

Теорема 1.1. Пары $T_{h,n}$ существуют и определяются с произволом $2(C^2_{n+1} - 1) + n - h$ функций h аргументов.

Доказательство. Система (1.9) с учетом тождеств (1.11) содержит $N_h = 2(C^2_{n+1} - 1) + n - h$ квадратичных уравнений и $h[2(C^2_{n+1} - 1) + n - h]$ независимых характеристических форм. Производя высечение цепи интегральных элементов по формам базиса ω_i ([2], стр. 230), из уравнений (1.9) заключаем, что

$$\tau_1 = h \cdot N_h, \ s_1 = s_2 = \dots = s_{h-1} = N_h, \ s_h = \tau_1 - (s_1 + \dots + s_{h-1}) = N_h.$$

Так как $Q = s_1 + 2s_2 + \dots + h \cdot s_h = C^2_{h+1} \cdot N_h$ и $N = C^2_{h+1} \cdot N_h$, то система в инволюции и определяет пару $T_{h,n}$ с произволом $2(C^2_{n+1} - 1) + n - h$ функций h аргументов. Теорема доказана.

Используя лемму Картана, из (1.9) получаем

$$\Delta a^i_a = a^{ij}_a \omega_j, \ \Delta b^i_{\alpha\beta} = b^{ij}_{\alpha\beta} \omega_j, \ \Delta B^i_{\alpha\beta} = B^{ij}_{\alpha\beta} \omega_j. \qquad (1.12)$$

Система величин $\Gamma = \{a^i_a, a_{\alpha\beta}, b^i_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B^i_{\alpha\beta}\}$ образует внутренний фундаментальный объект пары $T_{h,n}$ (см. [3], стр. 330). Система величин $\Gamma_1 = \{\Gamma, a^{ij}_a, b^{ij}_{\alpha\beta}, B^{ij}_{\alpha\beta}\}$ образует продолженный внутренний фундаментальный объект этой пары многообразий.

Теорема 2.1. Внутренний фундаментальный объект $\Gamma = \{a^i_a, a_{\alpha\beta}, b^i_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B^i_{\alpha\beta}\}$ является основным объектом пары $T_{h,n}$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4 ([1], стр. 32).

Дифференцируя тождества $a_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$ и $A_{\alpha\gamma} A^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$, получаем

$$\nabla a^{\alpha\beta} - \frac{2}{n} a^{\alpha\beta} \omega^\gamma_\gamma = -a^{\alpha\alpha_1} a^{\beta\beta_1} b^i_{\alpha_1\beta_1} \omega_i,$$
$$\nabla A^{\alpha\beta} - \frac{2}{n} A^{\alpha\beta} \omega^\gamma_\gamma = -A^{\alpha\alpha_1} A^{\beta\beta_1} B^i_{\alpha_1\beta_1} \omega_i. \qquad (1.13)$$

Следовательно, каждая из систем величин $a^{\alpha\beta}$ и $A^{\alpha\beta}$ образует дважды контравариантный симметрический тензор. Система величин a^i_α образует целинейный геометрический объект–подобъект основного фундаментального объекта Γ пары $T_{h,n}$.

§ 2. Пары $T_{n,n}$.

Рассмотрим случай $h=n$. Из теоремы [I] следует, что произвол существования такой пары $2(C^2_{n+1}-1)$ функций n аргументов. Основным фундаментальным объектом пары $T_{n,n}$ является объект

$$\Gamma=\{a_{\alpha\beta},\ b^{\gamma}_{\alpha\beta},\ A_{\alpha\beta},\ B^{\gamma}_{\alpha\beta}\}. \qquad (2.1)$$

Как следует из формул (I.10), подобъектами объекта Γ являются геометрические объекты

$$(a_{\alpha\beta}, b^{\gamma}_{\alpha\beta}),\ (A_{\alpha\beta}, B^{\gamma}_{\alpha\beta}),\ (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, b^{\gamma}_{\alpha\beta}),\ (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B^{\gamma}_{\alpha\beta}).$$

Обозначая $b_\alpha=b^{\beta}_{\alpha\beta}$, $B_\alpha=B^{\beta}_{\alpha\beta}$ и осуществляя свертку (I.10) по соответствующим индексам, получаем

$$\Delta b_\alpha = db_\alpha - b_\beta\omega^\beta_\alpha + b_\alpha\left(\frac{2}{n}\omega^\beta_\beta-\omega^{n+1}_{n+1}\right)-\frac{(n-1)(n+2)}{n}a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_{n+1},$$
$$\Delta B_\alpha = dB_\alpha - B_\beta\omega^\beta_\alpha + B_\alpha\left(\frac{2}{n}\omega^\beta_\beta-\omega^{n+1}_{n+1}\right)-\frac{(n-1)(n+2)}{n}A_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_{n+1}. \qquad (2.2)$$

Следовательно, имеем еще линейные однородные геометрические объекты

$$(a_{\alpha\beta}, b_\alpha),\ (A_{\alpha\beta}, B_\alpha),\ (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, b_\alpha),\ (a_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}, B_\alpha).$$

Каждый из первых двух геометрических объектов определяет в пространстве P_n инвариантный пучок гиперквадрик, содержащий локальный квадратичный элемент Φ_1, Φ_2 соответственно (см. [I стр.35). Имеет место и обратное утверждение.

Т е о р е м а I.2. Для инвариантности произвольной гипер-

квадрики

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha x^{n+1} + \lambda(x^{n+1})^2 = 0, \qquad (2.3)$$

проходящей через квадратичный элемент Φ_1, необходимо выполнение равенств

$$a_\alpha=\frac{n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha,\quad \delta\lambda = 2\lambda\left(\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma\right)+\frac{2n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha\pi^\alpha_{n+1}. \qquad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha x^{n+1}+\lambda(x^{n+1})^2$. Для инвариантности гиперквадрики (2.3) должно быть δF пропорционально F. При вычислении δF используем формулы

$$\delta a_{\alpha\beta}=a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha + a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta - \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma,\quad \delta x^\alpha = -x^\beta\pi^\gamma_\beta - x^{n+1}\pi^\alpha_{n+1}+\theta x^\alpha.$$

Учитывая сказанное, получаем:

$$\delta a_\alpha - a_\beta\pi^\beta_\alpha - a_\alpha\pi^{n+1}_{n+1}+\frac{2}{n}a_\alpha\pi^\gamma_\gamma - a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1}=0, \qquad (2.5)$$
$$\delta\lambda = 2\lambda\left(\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma\right)+2a_\alpha\pi^\alpha_{n+1}. \qquad (2.6)$$

Сравнивая (2.2) и (2.5), убеждаемся, что $a_\alpha=\frac{n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha$ и теорема доказана.

Совокупность величин $(a_{\alpha\beta}, b_\alpha, \lambda)$ с законом изменения

$$\delta a_{\alpha\beta}=a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha + a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta - \frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\gamma_\gamma,$$
$$\delta b_\alpha = b_\beta\pi^\beta_\alpha + b_\alpha\left(\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{2}{n}\pi^\gamma_\gamma\right)+\frac{(n-1)(n+2)}{n}a_{\alpha\beta}\pi^\beta_{n+1}, \qquad (2.7)$$
$$\delta\lambda = 2\lambda\left(\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma\right)+\frac{2n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha\pi^\alpha_{n+1}$$

образует тензор.

Т е о р е м а 2.2. Тензор $(a_{\alpha\beta}, b_\alpha, \lambda)$ определяет совокупность всех инвариантных гиперквадрик пространства P_n, проходящих через локальный квадратичный элемент многообразия $(n,n,n)^2$.

Эти гиперквадрики задаются уравнением

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+\frac{2n}{(n-1)(n+2)}b_\alpha x^\alpha x^{n+1}+\lambda(x^{n+1})^2=0. \qquad (2.8)$$

Обозначим

$$\rho = a_{\alpha\beta}b^\alpha b^\beta\frac{n^2}{(n-1)^2(n+2)^2}-\lambda. \qquad (2.9)$$

Имеем:

$$\delta\rho=2\rho\left(\pi^{n+1}_{n+1}-\frac{1}{n}\pi^\gamma_\gamma\right).$$

Следовательно, ρ — относительный инвариант.

Теорема 2.3. Гиперквадрика (2.8) тогда и только тогда является гиперконусом, когда $\rho=0$. Его вершина находится в точке

$$\bar a = a^{\alpha\beta}b_\alpha \bar A_\beta-\frac{(n-1)(n+2)}{n}\bar A_{n+1} \qquad (2.10)$$

Вводя обозначения

$$b^\alpha=a^{\alpha\beta}b_\beta,\quad B^\alpha=A^{\alpha\beta}B_\beta, \qquad (2.11)$$

имеем

$$\delta b^\alpha=-b^\beta\pi^\alpha_\beta+b^\alpha\pi^{n+1}_{n+1}+\frac{(n-1)(n+2)}{n}\pi^\alpha_{n+1}, \qquad (2.12)$$

$$\delta B^\alpha=-B^\beta\pi^\alpha_\beta+B^\alpha\pi^{n+1}_{n+1}+\frac{(n-1)(n+2)}{n}\pi^\alpha_{n+1}.$$

Квазитензоры b^α и B^α определяют инвариантные точки [I] (оснащение) $\bar a=b^\alpha\bar A_\alpha-\frac{(n-1)(n+2)}{n}\bar A_{n+1}$ и $\bar A=B^\alpha\bar A_\alpha-\frac{(n-1)(n+2)}{n}\bar A_{n+1}$.

Прямую, проходящую через эти точки, обозначим d, а точку пересечения её с гиперплоскостью квадратичных элементов Φ_1,Φ_2 через P. Величины $m=a^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$ и $\eta=A^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}$ — абсолютные инварианты пары $T_{n,n}$.

Обозначим:

$$A^\alpha_\beta=A^{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta},\ a^\alpha_\beta=a^{\alpha\gamma}A_{\gamma\beta},\ \tilde b^\alpha=A^{\alpha\beta}b_\beta,\ \tilde B^\alpha=a^{\alpha\beta}B_\beta,\ \tilde b_\alpha=A_{\alpha\beta}b^\beta,$$

$$\tilde B_\alpha=a_{\alpha\beta}B^\beta,\ \ell_\alpha=\tilde B_\alpha-b_\alpha,\ b_{\alpha\beta\gamma}=a_{\gamma(\alpha}b^\nu_{\beta\gamma)}-\frac{2}{n+1}b_{(\alpha}a_{\beta\gamma)},\ C^\alpha=B^\alpha-b^\alpha,\ m_\alpha=B_\alpha-\tilde b_\alpha$$

Системы величин $(\tilde b^\alpha, A^\alpha_\beta)$, $(\tilde B^\alpha, a^\alpha_\beta)$, $(A_{\alpha\beta}, \tilde b_\alpha)$, $(a_{\alpha\beta}, \tilde B_\alpha)$, C^α, ℓ_α, m_α, $b_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$

определяют тензоры пары $T_{n,n}$. Тензор C^α определяет инвариантную точку P. Тензоры ℓ_α и m_α определяют поляру точки P относительно квадрик $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$ и $A_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$ в гиперплоскости $x^{n+1}=0$. Их уравнения имеют вид

$$(\bar B_\alpha-b_\alpha)x^\alpha=0,\quad x^{n+1}=0 \text{ и}$$
$$(B_\alpha-\tilde b_\alpha)x^\alpha=0,\quad x^{n+1}=0. \qquad (2.13)$$

§ 3. Расслояемые пары $T^0_{2,3}$ в P_3.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается пара конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник C_1, C_2 с общей плоскостью (пара $T'_{2,3}$), обладающая следующими свойствами:

1) Конгруэнции (C_1) и (C_2) имеют две невырожденные фокальные поверхности (A_1) и (A_2), не касающиеся общей плоскости коник.

2) Точка A_3 является характеристической точкой плоскости и не инцидентна коникам C_1 и C_2.

3) Фокальные линии на поверхностях (A_i) не соответствуют.

4) Прямая A_1A_2 является полярой точки A_3 относительно обеих коник C_1 и C_2.

Поместим вершины A_i (i = I, 2) координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$ (α = I, 2, 3, 4) в общие фокальные точки A_1, A_2 коник C_1, C_2, A_3 — в характеристическую точку плоскости, A_4 — на линию пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i). Уравнения коник C_1, C_2 относительно этого репера записываются в виде:

$$(x^3)^2-2px^1x^2=0,\quad \text{и}\quad x^4=0,$$
$$(x^3)^2-2qx^1x^2=0,\quad x^4=0, \qquad (3.1)$$

где $p\neq 0,\ q\neq 0$.

Из условия инвариантности каждой из коник имеем

$$\delta \ln p = \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3 \,, \quad \delta \ln q = \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3 \,,$$

откуда

$$\delta \ln pq = 2\,(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3).$$

Следовательно, можно осуществить нормировку вершин так, чт

$$pq = 1 \,. \qquad (3.$$

После этой нормировки уравнения коник C_1 и C_2 принимаю

вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0 \,, \quad x^4 = 0,$$

$$p(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0 \,, \quad x^4 = 0.$$

Дифференциальные уравнения пары $T'_{2,3}$ запишутся так:

$$\omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k \,, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k \,, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k \,, \quad \omega_i^j = 0,$$

$$dp = p^k\omega_k \,, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k \,, \quad \omega_3^4 = 0. \qquad (3.$$

Здесь и в дальнейшем $\omega_i = \omega_i^4$; $i,j,k = 1,2$; $i \neq j$ и по i, j не суммир

вать.

Определение 3.I. Расслояемой парой конгруэнц

$(C_1), (C_2)$ коник с общей плоскостью (парой $T_{2,3}^0$) называется

такая пара $T'_{2,3}$, для которой существует одностороннее расслоен

от каждой конгруэнции $(C_1), (C_2)$ к многообразию прямых $(A_3A$

Определение 3.2. Пусть (C) - конгруэнция кон

C, (ℓ) - многообразие прямых ℓ зависящих от m = 2, I,

параметров. Конгруэнция (C) односторонне расслояема к многообр

зию (ℓ), если дано однозначное отображение (C) на (ℓ) и к к

груэнции (C) можно присоединить однопараметрическое семейств

Σ поверхностей так, чтобы касательные плоскости к каждой

поверхности семейства Σ в точках пересечения с коникой C

конгруэнции (C) содержали соответственную прямую ℓ многообра

зия (ℓ).

Условия одностороннего расслоения от (C_1) к (A_3A_4) и соответст-

но от (C_2) к (A_3A_4) записываются так:

$$(p^1 - pa^1)\Gamma_3^{12} - (p^2 - pa^2)\Gamma_3^{11} = 0,$$

$$(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \qquad (3.5)$$

$$(pa^1 - p^1)\Gamma_3^{22} - (pa^2 - p^2)\Gamma_3^{21} = 0$$

$$(pa^1 + p^1)\Gamma_3^{12} - (pa^2 + p^2)\Gamma_3^{11} = 0,$$

$$(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}) + \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11} + \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{21} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{22} + \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0, \qquad (3.6)$$

$$(pa^1 + p^1)\Gamma_3^{22} - (pa^2 + p)\Gamma_3^{21} = 0.$$

Теорема 3.I. Характеристическая поверхность (A_3) семейства плоскостей пары $T_{2,3}^0$ вырождается.

Доказательство. Вычитая средние уравнения (3.5) и (3.6) и учитывая, что $p \neq \frac{1}{p}$, ибо коники C_1 и C_2 не совпадают, имеем $\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21} = 0$, т.е. $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0$, что и требовалось доказать.

Замыкания уравнений $\omega_3^4 = 0, \omega_i^j = 0$ дают $\Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{12}$,

$$\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{22} - \Gamma_1^{32}\Gamma_3^{21} + \Gamma_4^{22} = 0, \quad \Gamma_2^{32}\Gamma_3^{11} - \Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12} + \Gamma_4^{11} = 0 \,. \qquad (3.7)$$

I. Случай вырождения поверхности (A_3) в точку (пара $T_{2,3}^{0,1}$). В этом случае $\omega_3^1 = 0, \omega_3^2 = 0$. Из (3.5), (3.6) и (3.7) имеем

$$\Gamma_4^{22} = 0 \,, \quad \Gamma_4^{11} = 0 \qquad \text{и} \qquad \Gamma_4^{12} + \Gamma_4^{21} = 0 \,. \qquad (3.8)$$

Положим $\Gamma_4^{12} = \alpha$. Имеем $\omega_4^1 = \alpha\omega_2$ и $\omega_4^2 = -\alpha\omega_1$; замыкая последние два уравнения, убеждаемся, что $\alpha = 0$. Прямая A_3A_4, следовательно, неподвижна.

Теорема 3.2. Пара $T_{2,3}^{0,1}$ существует и определяется с произволом четырех функций двух аргументов.

Доказательство. Система для определения пары $T^{0,1}_{2,3}$ имеет следующий вид:

$$\omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\ \ \omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=a^k\omega_k,\ \ d\rho=\rho^k\omega_k,$$
$$\omega^i_3=0,\ \ \omega^4_3=0,\ \ \omega^j_i=0,\ \ \omega^i_4=0 \qquad (3.9)$$

Замыкая все уравнения системы (3.9), убеждаемся в её инволютивности и находим произвол-четыре функции двух аргументов.

Теорема 3.3. Фокальные поверхности (A_i) пары $T^{0,1}_{2,3}$ суть неподвижные плоскости. Фокальными линиями $\omega_i=0$ на поверхности (A_i) являются прямые, проходящие через неподвижную точку A_3.

Доказательство. Используя (3.9), имеем

$$d(\bar A_i\bar A_3\bar A_4)=(\omega^i_i+\omega^3_3+\omega^4_4)(\bar A_i\bar A_3\bar A_4)$$
$$d(\bar A_i\bar A_3)=(\omega^i_i+\omega^3_3)(\bar A_i\bar A_3)+\omega_i(\bar A_4\bar A_3).$$

Теорема доказана.

Условием инвариантности конуса $(x^3)^2-2\rho x^1x^2+2\lambda x^3x^4+\lambda^2(x^4)^2$ с вершиной в точке $\bar K=\bar A_4-\lambda\bar A_3$ имеет вид

$$\delta\lambda=\lambda(\pi^4_4-\pi^3_3)+\pi^3_4. \qquad (3.10)$$

Осуществляя канонизацию $\lambda=0$, т.е. совмещая A_4 с вершиной конуса K, получаем

$$\omega^3_4=k_1\omega_1+k_2\omega_2. \qquad (3.11)$$

Замыкая это уравнение, имеем

$$[dk_1+k_1(\omega^1_1+\omega^3_3-2\omega^4_4)]\wedge\omega_1+[dk_2+k_2(\omega^2_2+\omega^3_3-2\omega^4_4)]\wedge\omega_2=0.$$

Считая $k_1k_2\neq0$, нормируем так вершины репера, чтобы $k_1=k_2=1$.

II. Случай вырождения поверхности (A_3) в линию (пары $T^{0,2}_{2,3}$). Пусть $\omega^2_3=\alpha\,\omega^1_3$, где $\omega^1_3\neq0$. Продолжая это уравнение убеждаемся в возможности проведения нормировки вершин репера

так, чтобы $\alpha=1$. Замыкая уравнение $\omega^4_3=0$, получаем

$$\omega^1_3=\omega^2_3=\beta(\omega_1+\omega_2),\ \ \omega^2_2-\omega^1_1=\gamma(\omega_1+\omega_2),$$

где $\beta\neq0$. Система, определяющая пару $T^{0,2}_{2,3}$, состоит из уравнений Пфаффа

$$\omega^i_4=\Gamma^{ik}_4\omega_k,\ \ \omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\ \ \omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3=\tilde a(\omega_1+\omega_2), \qquad (3.12)$$
$$\rho=\tilde\rho(\omega_1+\omega_2),\ \omega^1_3=\omega^2_3=\beta(\omega_1+\omega_2),\ \omega^2_2-\omega^1_1=\gamma(\omega_1+\omega_2),\ \omega^4_3=\omega^j_i=0$$

и конечных связей

$$(\Gamma^{31}_1-\Gamma^{32}_1)\beta+\Gamma^{22}_4=0,\ \ (\Gamma^{32}_2-\Gamma^{31}_2)\beta+\Gamma^{11}_4=0, \qquad (3.13)$$
$$\Gamma^{11}_4+\Gamma^{22}_4-\Gamma^{12}_4-\Gamma^{21}_4=0.$$

Теорема 3.4. Пары $T^{0,2}_{2,3}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Замыкая (3.12) и учитывая конечные связи (3.13) убеждаемся, что система в инволюции и произвол её решения две функции двух аргументов.

Теорема 3.5. Торсы прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) пары $T^{0,2}_{2,3}$ совпадают.

Доказательство. Уравнение торсов конгруэнции (A_3A_4) имеет вид $\omega^1_3(\omega^1_4-\omega^2_4)=0$. Так как из последнего уравнения (3.13) имеем $\omega^1_4-\omega^2_4=(\Gamma^{11}_4-\Gamma^{21}_4)(\omega_1+\omega_2)$, $\omega^1_3=\beta(\omega_1+\omega_2)$, то теорема доказана.

Пара $T^{0,2}_{2,3}$ обладает многими интересными геометрическими свойствами. Случай $\alpha\equiv0$ исследуется аналогично.

Легко строится канонический репер пары $T^{0,2}_{2,3}$.

Литература

1. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом.сб., вып.3 (Труды Томского университета, 1968), 28-42, 1963.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М-Л, 1948.

3. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многооб[разий]. Труды Московского математического общества, т.2, 275-3[..] ГИТТЛ, М., 1953.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

П О Х И Л А М.М.

ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ (Общий случай)

В n-мерном проективном пространстве рассматривается пара $V_{h,n}$ [м]ногообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов [2] с несовпадающими [г]иперплоскостями соответствующих локальных квадратичных элемен[т]ов. Найден основной фундаментальный объект пары $V_{h,n}$. Построен [к]аноничеокий репер пары конгруэнций коник в P_3 (пары $V_{2,3}$). [И]сследуется частный класс расслояемых пар B [3] конгруэнций в P_3 (пары B°).

§ I. Основной внутренний объект пары многообразий $V_{h,n}$.

Пусть $(\Phi_1),(\Phi_2)$ -пара многообразий $(h,h,n)^2$ квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 n-мерного проективного пространства P_n.

О п р е д е л е н и е I.I. Парой $V_{h,n}$ многообразий (Φ_1), (Φ_2) будем называть такую пару многообразий $(h,h,n)^2$ [2], у которой гиперплоскости τ_1, τ_2 соответствующих локальных квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 не совпадают.