

Г.Л.С в е ш н и к о в а (Калининградский ун-т). Конгруэнции \mathcal{U}_3	70
Е.К.С е л ь д ю к о в (Марийский пед ин-т). Сети, присоединенные к заданным семействам линий на $V_p \subset E_n$	73
А.С.С е н и л о в (Калининградский ун-т). О расслоении поверхности V_{k+m} на ∞^{m-6} поверх- ностей $V_{k+\sigma}$ в R_M	77
Е.В.С и л а е в (МГПИ им.В.И.Ленина). О R -сопряженных системах на гиперсфере в евк- лидовом пространстве E_n	84
Е.В.С к р ы д л о в а (Калининградский ун-т). О вырожденных конгруэнциях, порожденных квадратикой и точкой	88
Е.П.С о п и н а (Калининградский ун-т). О полях геометрических объектов на многообразии V_{n-1}	93
А.В.С т о л я р о в (Чебоксарский пед. ин-т). Двойственная геометрия (п-I)-тканей на распределе- нии гиперплоскостных элементов	96
В.А.Т и х о н о в (Московский институт стали). О преобразовании Лапласа ортогональных ступенчато- чебышевских сопряженных систем	102
В.А.Т р у п п о в (Иркутский политехн.ин-т). Об инвариантах дифференциального уравнения в частных производных второго порядка	109
Т.П.Ф у н т и к о в а (Калининградский технич. ин-т). Конгруэнции, образованные эллипсом и прямой	115
В.Н.Х у д е н к о (Калининградский ун-т). Многообразия коник в R_4 с неопределенными фокальными поверхностями	118
В.П.Ц а п е н к о (Калининградский ун-т). Об од- ном классе конгруэнций, порожденных квадратикой и точ- кой	121
Ю.И.Ш е в ч е н к о (Калининградский техн.ин-т). Геометрическая характеристика некоторых индуцирован- ных связностей поверхности	126
А.М.Ш е л е х о в, Е.И.Б у р г, Л.Е.Евдокимова, М.Е.Снеткова (Калининградский ун-т). Обобщение одной теоремы Бельтрами	131
С е м и н а р	142

Н.Я.А л и е в

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе изучается случай отображения поверхности из E_4 на поверхность из \bar{E}_4 , когда график отображения имеет только две независимые вторые квадратичные формы.

Рассмотрим евклидовы пространства E_4 и \bar{E}_4 как вполне ортогональные подпространства в собственно евклидовом пространстве E_8 , имеющие одну общую точку O . Пусть V_2 и \bar{V}_2 гладкие поверхности в E_4 и \bar{E}_4 соответ-ственно.

Будем изучать дифференцируемое взаимно однозначное отображение $T: V_2 \rightarrow \bar{V}_2$, которое переводит область $\Omega \subset V_2$ в некоторую область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2$. Если точка x_1 описывает область Ω , то точка $x_2 = T(x_1)$ описывает область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2$, а точка x с радиус-вектором $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 = \overline{Ox}_1$, $\vec{x}_2 = \overline{Ox}_2$, опишет область поверхности V_2^* , называемой графиком отображения T [1].

Пусть $R_1 = \{x_1, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, $R_2 = \{x_2, \vec{e}_{4+i}, \vec{e}_{4+\alpha}\}$ ($i, j = 1, 2; \alpha, \beta = 3, 4$) соответствующие подвижные реперы в E_4 и \bar{E}_4 [1], причем $\vec{e}_i \in T_2(x_1), (dT)_x(\vec{e}_i) = \vec{e}_{4+i} \in T_2(x_2)$ и $T_2(x_1), T_2(x_2)$ - касательные плоскости к поверхностям V_2, \bar{V}_2, V_2^* в соответствующих точках x_1, x_2, x , а \vec{e}_α и $\vec{e}_{4+\alpha}$ составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения к $T_2(x_1)$ и $T_2(x_2)$ в пространствах E_4 и \bar{E}_4 соответственно.

Инфинитезимальные перемещения этих реперов удовлетво-ряют уравнениям:

$$d\vec{x}_1 = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j + \omega_\alpha^i \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \quad (1)$$

$$d\vec{x}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{4+i}, \quad d\vec{e}_{4+i} = \bar{\omega}_j^i \vec{e}_{4+j} + \bar{\omega}_\alpha^i \vec{e}_{4+\alpha}, \quad d\vec{e}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha^i \vec{e}_{4+i} + \bar{\omega}_\alpha^\beta \vec{e}_{4+\beta} \quad (2)$$

В точке $x \in V_2^*$ возникает репер: $R = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_{2+i}, \vec{e}_{2+\alpha}, \vec{e}_{4+i}\}$, где $\vec{e}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{4+i}$; $\vec{e}_{2+i} = \vec{e}_i - \gamma_{is} \bar{\gamma}^{sj} \vec{e}_{4+j}$; $\vec{e}_{2+\alpha} = \vec{e}_\alpha$; $\vec{e}_{4+\alpha} = \vec{e}_{4+\alpha}$; $\bar{\gamma}_\alpha^i = \vec{e}_{4+i}$; $\bar{\gamma}_\alpha^j = \vec{e}_{4+j}$; $\bar{\gamma}_\alpha^i = \vec{e}_i$.

Имеем

$$d\vec{x} = \theta^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \theta_j^i \vec{e}_j + \theta_i^{2+j} \vec{e}_{2+j} + \theta_i^{2+\alpha} \vec{e}_{2+\alpha} + \theta_i^{4+\alpha} \vec{e}_{4+\alpha} \quad (3)$$

$$d\vec{e}_\rho = \theta_\rho^i \vec{e}_i + \theta_\rho^{2+i} \vec{e}_{2+i} + \theta_\rho^{2+\alpha} \vec{e}_{2+\alpha} + \theta_\rho^{4+\alpha} \vec{e}_{4+\alpha} \quad (\rho = \bar{3}, \bar{8})$$

$$\theta_i^j = c_{ij}^p \omega^j \quad (4)$$

В этой статье мы будем рассматривать случай, когда поверхность V_2^* имеет две линейно независимые вторые квадратичные формы, следовательно $\text{rang } \|c_{ij}^p\| = 2$. Будем считать, что квадратичные формы Φ^3, Φ^4 линейно независимы. Тогда

$$\Phi^{2+\alpha} = \lambda_{2+j}^{2+\alpha} \Phi^{2+j}; \quad \Phi^{4+\alpha} = \lambda_{2+j}^{4+\alpha} \Phi^{2+j} \quad (5)$$

Используя равенства (5), находим:

$$d^2 \vec{x} = (d\theta^i + \theta^j \theta_j^i) \vec{e}_i + \Phi^{2+j} \vec{c}_j.$$

Векторы \vec{c}_1, \vec{c}_2 образуют базис плоскости главной нормали $N_2^*(x)$ поверхности V_2^* . Проектируя $N_2^*(x)$ ортогонально на E_4 и \bar{E}_4 , получим плоскость $\tilde{N}_2(x_1) = [x_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2]$, $\vec{a}_i = \vec{e}_i + \lambda_{2+i}^{2+\alpha} \vec{e}_\alpha$ и плоскость $\tilde{N}_2(x_2) = [x_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2]$, $\vec{b}_i = -\gamma_{is} \bar{\gamma}^{sj} \vec{e}_{4+j} + \lambda_{2+i}^{4+\alpha} \vec{e}_{4+\alpha}$. Плоскости $\tilde{N}_2(x_1) = [x_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{M}]$, $\tilde{N}_2(x_2) = [x_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{M}]$ и $\tilde{N}_2(x_2) = [x_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{M}]$, $\tilde{N}_2(x_2) = [x_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{M}]$ порождают в областях Ω и $\bar{\Omega}$ сети Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ соответственно, где \vec{M} и \vec{M} - векторы средней кривизны поверхностей V_2 и \bar{V}_2 , а векторы \vec{N} и \vec{N} ортогональны соответственно векторам \vec{M} и \vec{M} в нормальных плоскостях этих поверхностей.

Направим вектор \vec{e}_3 коллинеарно вектору \vec{M} , а вектор \vec{e}_4 коллинеарно вектору \vec{M} . Тогда направляющие векторы линий сетей Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ имеют следующие представления:

$$\vec{m}_1 = \lambda_4^6 \vec{e}_1 - \lambda_3^6 \vec{e}_2, \quad \vec{m}_2 = \lambda_4^5 \vec{e}_1 - \lambda_3^5 \vec{e}_2,$$

$$\vec{m}_1 = [\lambda_4^8 \gamma_{15} \gamma^{s1} - \lambda_3^8 \gamma_{25} \gamma^{s1}] \vec{e}_5 + [\lambda_4^8 \gamma_{15} \gamma^{s2} - \lambda_3^8 \gamma_{25} \gamma^{s2}] \vec{e}_6,$$

$$\vec{m}_2 = [\lambda_4^7 \gamma_{15} \gamma^{s1} - \lambda_3^7 \gamma_{25} \gamma^{s1}] \vec{e}_5 + [\lambda_4^7 \gamma_{15} \gamma^{s2} - \lambda_3^7 \gamma_{25} \gamma^{s2}] \vec{e}_6.$$

Пусть Σ_2' и $\bar{\Sigma}_2'$ - сети на поверхностях V_2 и \bar{V}_2 , взаимные к сетям Σ_2 и $\bar{\Sigma}_2$ соответственно [2].

Т е о р е м а 1. $\bar{\Sigma}_2' = T(\Sigma_2')$ тогда и только тогда, когда квадратичные асимптотические формы поверхностей V_2 и \bar{V}_2 удовлетворяют либо условию $\lambda_4^{2+\alpha} \Phi^{4+\alpha} = \lambda_4^{4+\alpha} \Phi^{2+\alpha}$, либо условию $\lambda_4^{2+\alpha} \Phi^{4+\beta} = \lambda_4^{4+\beta} \Phi^{2+\alpha}$.

Т е о р е м а 2. $\bar{\Sigma}_2 = T(\Sigma_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется либо условие

$$(\lambda_{2+j}^{2+\alpha} \gamma^{ji} \vec{e}_{4+i})(\theta_{22}^\alpha \vec{c}_{11} - \theta_{11}^\alpha \vec{c}_{22}) = 0,$$

либо условие $(\lambda_{2+j}^{2+\alpha} \gamma^{ji} \vec{e}_{4+i})(\theta_{22}^\beta \vec{c}_{11} - \theta_{11}^\beta \vec{c}_{22}) = 0$, где \vec{c}_{ii} - вектор вынужденной кривизны линии, проходящей через точку x в направлении вектора \vec{e}_i .

Т е о р е м а 3. Если $\bar{\Sigma}_2 = T(\Sigma_2)$, то $\bar{\Sigma}_2' = T(\Sigma_2')$ тогда и только тогда, когда направляющие векторы линий сети $\bar{\Sigma}_2'$ удовлетворяют условию

$$\vec{m}_\alpha \cdot (a_{11}^\beta \vec{c}_{22} - a_{22}^\beta \vec{c}_{11}) = 0, \quad (\alpha \neq \beta)$$

или условию

$$\vec{m}_\alpha \cdot (a_{11}^\alpha \vec{c}_{22} - a_{22}^\alpha \vec{c}_{11}) = 0.$$

Список литературы

1. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств. - Уч. записки МПИ им. В.И. Ленина, 1970, № 374, т. I, с. 41-51.

2. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., 1966, 6, № 4, с. 475-491.

3. Добротворский А.С. Отображение гиперповерхностей евклидовых пространств. - Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1972, с. 46-59.