УДК 532

Н. Л. Великанов, В. А. Наумов, С. И. Корягин

РАВНОВЕСИЕ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ В ФОРМЕ ДУГИ ЭЛЛИПСА В ПОТОКЕ ВОДЫ

Предложен метод расчета, который позволяет определить условия равновесия дуги в форме части эллипса, обтекаемой однородным потом жидкости.

Calculation method to determine the equilibrium conditions of the arc in the form of the ellipse, then streamlined homogeneous liquid

Ключевые слова: коэффициент гидродинамического сопротивления, численный метод, однородный стержень.

Key words: drag coefficient, numerical method, uniform rod.

В инженерных расчетах по аэродинамике летательных аппаратов, гидродинамике кораблей и судов, проектированию орудий рыболовства и других отраслей требуется определять условия равновесия различных элементов конструкции в потоке вязкой жидкости [1—4]. В работе [5] исследованы условия равновесия в воде однородного стержня, в том числе в виде дуги окружности. В данной статье предложен численный метод расчета равновесия в воде однородного стержня в виде дуги эллипса.

Однородный стержень плотностью ρ_s в форме четверти эллипса (полуоси a, b) находится в потоке воды в положении, показанном на рисунке 1. Плотность воды ρ_f, скорость потока U.

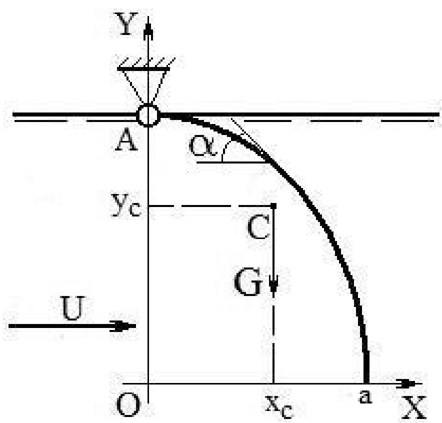

Рис. 1. Однородный стержень плотностью ρ_s в форме четверти эллипса

Уравнение эллипса в размерной и безразмерной форме:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\quad x^2+\frac{y^2}{k^2}=1,\quad x=\frac{X}{a},\, y=\frac{Y}{b},\, k=\frac{b}{a}.$$

Выразим функцию y(x), ее производную и дифференциал:

$$y=k\sqrt{1-x^2},\quad y'=-\frac{kx}{\sqrt{1-x^2}},\quad dy=y'dx=-\frac{kx}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Угол атаки α является функцией аргумента x и зависит от величины отношения полуосей эллипса k (рис. 2):

$$\alpha(k,x)=\operatorname{arctg}\frac{kx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дифференциал дуги эллипса (безразмерный)

$$d\sigma=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx. \quad (1)$$

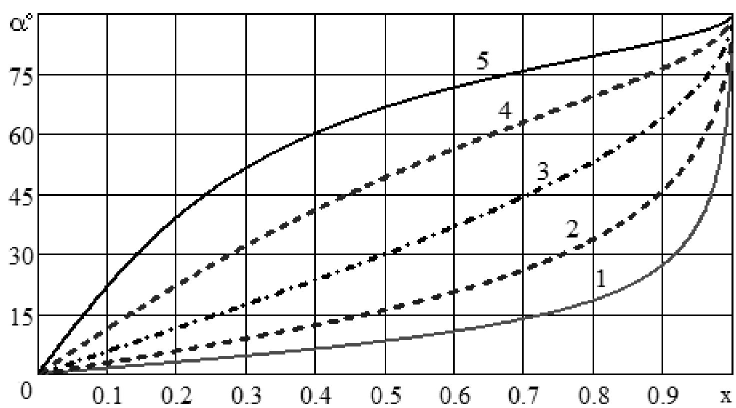

Рис. 2. Зависимость локального угла атаки α от аргумента x при различных значениях параметра k: *1* — $k=0{,}25$; *2* — $k=0{,}5$; *3* — $k=1$; *4* — $k=2$; *5* — $k=4$

Длину стержня (безразмерную, отнесенную к a, можно найти с помощью криволинейного интеграла (по дуге)

$$L(k)=\int_L d\sigma=\int_0^1\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx. \quad (2)$$

Средний по длине дуги угол атаки

$$\alpha_{cp}(k)=\frac{1}{L(k)}\int_L \alpha(k,x)d\sigma=\frac{1}{L(k)}\int_0^1\alpha(k,x)\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx. \quad (3)$$

Заметим, что (2), (3) и последующие выражения не интегрируются в квадратурах (в общем случае не существует первообразной, выраженной через элементарные функции). Определенные интегралы будем находить численным методом в среде Mathcad (рис. 3).

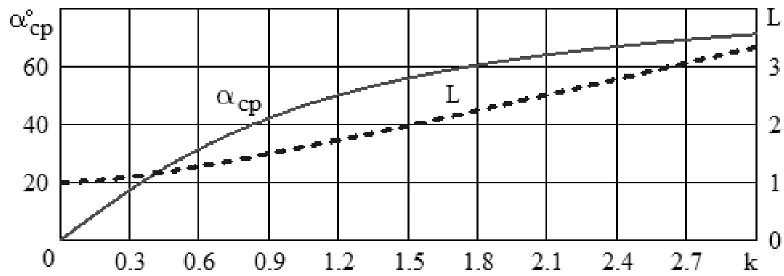

Рис. 3. Зависимость среднего по длине дуги угла атаки и безразмерной длины дуги L от значений параметра k

С учетом (1) координаты центра тяжести определяются с помощью интегралов по длине дуги (рис. 4):

$$x_c(k)=\frac{1}{L(k)}\int_L x d\sigma=\frac{1}{L(k)}\int_0^1\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}x dx,$$
$$y_c(k)=\frac{1}{L(k)}\int_L y d\sigma=\frac{k}{L(k)}\int_0^1\sqrt{(k^2-1)x^2+1}dx. \quad (4)$$

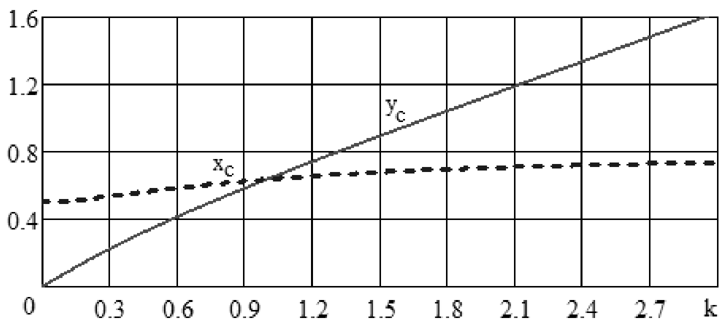

Рис. 4. Зависимость безразмерных координат центра тяжести от параметра k

Полагаем, что при больших числах Рейнольдса коэффициенты гидродинамического сопротивления длинного цилиндра при поперечном и продольном обтекании можно принять равными [4; 5]

$$C_{90}=1,2,\ C_0=0,04.$$

Локальные коэффициенты сил лобового сопротивления и подъемной криволинейного стержня при произвольном угле атаки будут такими же, как у прямолинейного цилиндра (рис. 5):

$$C_x=C_0+\left(C_{90}-C_0\right)\sin^n\alpha,\quad C_y=C_{90}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

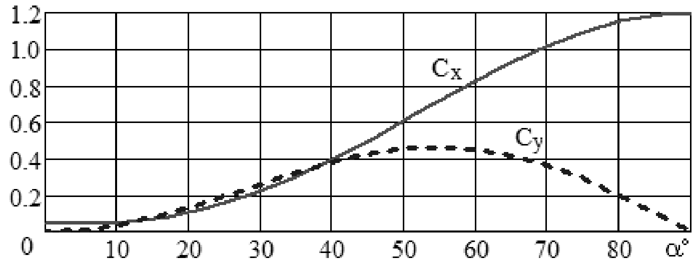

Рис. 5. Зависимость локальных коэффициентов гидродинамического сопротивления стержня от угла атаки

Элементарная сила лобового сопротивления и подъемная сила (действующие на малый элемент дуги $d\sigma$)

$$dR_x(k)=\frac{1}{2}C_x(\alpha)U^2 d\rho_f a d\sigma,\ \ dR_y(k)=\frac{1}{2}C_y(\alpha)U^2 d\rho_f a d\sigma. \qquad (5)$$

Силы гидродинамического сопротивления, действующие на весь криволинейный стержень, находятся интегрированием (5):

$$R_x(k)=\frac{1}{2}U^2 da\rho_f\int_0^1 C_x(\alpha(k,x))\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx, \qquad (6)$$

$$R_y(k)=\frac{1}{2}U^2 da\rho_f\int_0^1 C_y(\alpha(k,x))\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx. \qquad (7)$$

Перейдем к соответствующим безразмерным числам Ньютона (рис. 6):

$$Ne_x(k)=\frac{R_x(k)}{0,5U^2 da\rho_f}=\int_0^1 C_x(\alpha(k,x))\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx, \qquad (8)$$

$$Ne_y(k)=\frac{R_y(k)}{0,5U^2 da\rho_f}=\int_0^1 C_y(\alpha(k,x))\sqrt{\frac{(k^2-1)x^2+1}{1-x^2}}dx,$$

$$K(k)=Ne_y(k)\,/\,Ne_x(k).$$

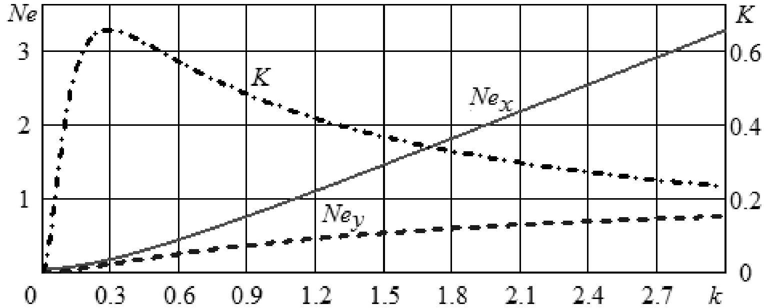

Рис. 6. Зависимость чисел Ньютона от параметра k

Найдем, при какой скорости потока *U* однородный криволинейный стержень в форме четверти эллипса, в положении, показанном на рисунке 1, будет находиться в состоянии равновесия. Условие равновесия: алгебраическая сумма моментов сил относительно оси *Az*, перпендикулярной плоскости рисунка 1, равна нулю:

$$M_z(R_x) + M_z(R_y) - (G - F_A) X_C = 0, \tag{9}$$

$$M_z(R_x) = \int_0^a (b - Y) dR_x, \quad M_z(R_y) = \int_0^a X dR_y. \tag{10}$$

Подставим (9) в (10) и преобразуем выражения (рис. 7):

$$M_z(R_x) = \frac{1}{2} U^2 d a^2 \rho_f mx(k), \quad M_z(R_y) = \frac{1}{2} U^2 d a^2 \rho_f my(k), \tag{11}$$

$$mx(k) = k \int_0^1 C_x(\alpha(k, x))(1 - \sqrt{1 - x^2}) \sqrt{\frac{(k^2 - 1)x^2 + 1}{1 - x^2}} dx, \tag{12}$$

$$my(k) = \int_0^1 C_y(\alpha(k, x)) x \sqrt{\frac{(k^2 - 1)x^2 + 1}{1 - x^2}} dx, \quad M(k) = \frac{my(k)}{mx(k)}. \tag{13}$$

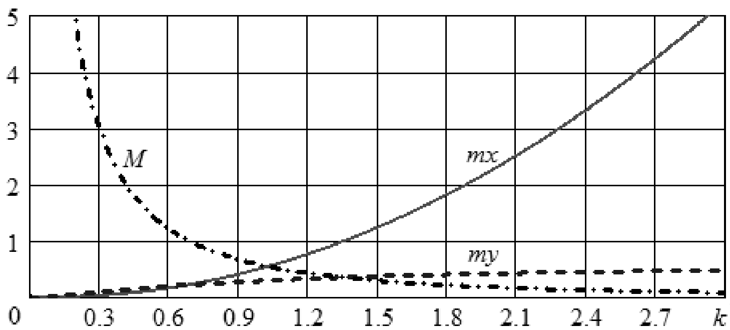

Рис. 7. Зависимость безразмерных гидродинамических моментов от *k*

С учетом (11)—(13) уравнение моментов (9) можно записать в безразмерной форме:

$$my(k) + my(k) - \frac{x_c(k) L(k)}{Fr_m(k)} = 0,$$

где

$$Fr_m = \frac{2\lambda U^2}{\pi(1 - \lambda) g d}.$$

Из уравнения (13) выразим модифицированное число Фруда, а по нему найдем скорость потока, обеспечивающую состояние равновесия (рис. 8):

$$Fr_m(k) = \frac{x_c(k) L(k)}{my(k) + my(k)}, \quad U(k) = \sqrt{Fr_m(k) \frac{\pi(1 - \lambda) g d}{2\lambda}}. \tag{14}$$

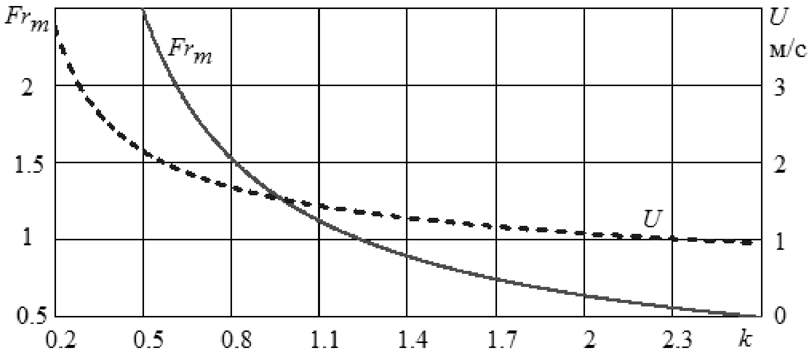

Рис. 8. Число Фруда и скорость потока, обеспечивающие состояние равновесия

Рассмотрим пример при следующих значениях размерных параметров задачи:

$a = 1$ м; $b = 2$ м; $\rho_f = 1000$ кг/м³; $\rho_s = 4000$ кг/м³; $d = 0{,}04$ м; $U = 1$ м/с.

Тогда

$$k_0 = \frac{b}{a} = 2, \quad \lambda = \frac{\rho_f}{\rho_s} = 0,25.$$

Безразмерная и размерная (м) длина дуги по формуле (2)

$$L(k_0) = 2,422, \; Lr = aL(k_0) = 2,422 \text{ м}.$$

Вес криволинейного стержня в воде

$$Gw = \frac{\pi d^2}{4} Lr(1-\lambda)\rho_f g = 22,371 \text{ Н}.$$

Безразмерные и размерные координаты центра тяжести по формулам (4)

$$x_c(k_0) = 0,706, \; y_c(k_0) = 1,140, \; ax_c(k_0) = 0,706 \text{ м}, \; ay_c(k_0) = 1,140 \text{ м}.$$

Средний по длине дуги угол атаки

$$\alpha_{\text{ср}}(k_0) = 62{,}8°.$$

Числа Ньютона по (8):

$$Ne_x(k_0) = 2{,}417, \; Ne_y(k_0) = 0{,}663, \; K(k_0) = 0{,}262.$$

Составляющие силы гидродинамического сопротивления, действующие на весь криволинейный стержень (в Ньютонах) по (6) – (7):

$$R_x = 0,5U^2 da\rho_f Ne_x(k_0) = 48,338 \text{ Н},$$

$$R_y = 0,5U^2 da\rho_f Ne_y(k_0) = 25,306 \text{ Н}.$$

Безразмерные моменты сил гидродинамического сопротивления по формулам (12) – (13):

$$mx(k_0) = 2{,}274, \; my(k_0) = 0{,}430, \; M(k_0) = 0{,}189.$$

Размерные моменты сил гидродинамического сопротивления по формуле (11):

$$M_x = 45{,}48\ \text{Н}\cdot\text{м},\ M_y = 8{,}61\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Модифицированное число Фруда и скорость потока в равновесии по формуле (14):

$$Fr_m(k_0) = 0{,}603,\ U(k_0) = 1{,}08\ \text{м/с}.$$

Таким образом, предложенный метод расчета позволяет определить условия равновесия дуги в форме части эллипса, обтекаемой однородным потом жидкости.

Список литературы

1. *Петров К.П.* Аэродинамика элементов летательных аппаратов. М., 1985.
2. *Великанов Н.Л.* Механика кошелькового лова рыбы. Калининград, 2001.
3. *Норьков Е.С., Рудниченко А.А.* Анализ особенностей распределения по длине корпуса сил сопротивления воды движению скоростного судна // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2014. Вып. 82 (366). С. 139—146.
4. *Великанов Н.Л., Наумов В.А.* Гидродинамическое сопротивление систем из стержней и нитей : монография. Калининград, 2015.
5. *Наумов В.А., Ахмедов И.М.* Коэффициенты гидродинамического сопротивления цилиндрического стержня // Водопользование и задачи гидромеханики : сб. науч. тр. Калининград, 2015. С. 63—68.

Об авторах

Николай Леонидович Великанов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: monolit8@yandex.ru

Владимир Аркадьевич Наумов — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет, Калининград.
E-mail: van-old@rambler.ru

Сергей Иванович Корягин — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: SKoryagin@kantiana.ru

About the authors

Prof. Nikolay Velikanov, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: monolit8@yandex.ru

Prof. Vladimir Naumov, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.
E-mail: van-old@rambler.ru

Prof. Sergey Koryagin, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: SKoryagin@kantiana.ru