$$\omega_4^2 + \omega_5^2 = b\,\omega_1, \quad db - b(\omega_4^4 + \omega_5^5) = 0 \tag{8}$$

Рассмотрим случай, когда $b = 1$.

В результате получим систему уравнений Пфаффа

$$\omega_4^1 + \omega_5^1 = \omega_2, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_4^2 + \omega_5^2 = \omega_1, \quad \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega_4^3 + \omega_5^3 = -\omega_3, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \omega_3^2, \quad \omega_2^3 = \omega_3^1, \tag{9}$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^4 = \omega_1, \quad \omega_2^4 = \omega_2, \quad \omega_3^4 = \omega_3,$$

$$\omega_4^4 = -\omega_5^4, \quad \omega_5^5 = -\omega_4^5, \quad \omega_4^4 + \omega_5^5 = 0.$$

Чистое замыкание системы (9) обращается в нуль, следовательно, система (9) является вполне интегрируемой.

Рассмотрим гиперплоскость пространства $\mathcal{P}_4$, определяемую уравнением

$$\varphi \equiv x^4 - x^5 = 0. \tag{10}$$

В силу (9) $\quad d\varphi = \theta\varphi,$

значит гиперплоскость (10) стационарна. Аналогично двумерная квадрика Q_2 стационарна:

$$Q_2: \quad \begin{cases} (x^3)^2 - 2x^1x^2 + x^4x^5 = 0 \\ x^4 - x^5 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из (1), (11) следует, что коники конгруэнции (Q_1) инцидентны двумерной квадрике (11).

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.-В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.12 1981

В.П.Ц а п е н к о

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве рассматривается частный класс конгруэнций $(P,Q)_{2,2}$, порожденных квадрикой Q и неинцидентной ей точкой P.

Изучение конгруэнции $(P,Q)_{2,2}$ проводится в подвижном репере $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. Здесь коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q. Вершина A_3 репера помещена в полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.

Уравнение квадрики Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(P,Q)_{2,2}$ имеют следующий вид:

$$F \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \tag{1}$$

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = \gamma_{3k}^0\,\omega^k, \quad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j\,\omega^k,$$

$$\omega_i^0 = \gamma_{ik}^0\,\omega^k, \quad \omega_3^i = \gamma_{3k}^i\,\omega^k, \quad \omega_i^3 = \gamma_{ii}^3\,\omega^i + a\,\omega^j, \tag{2}$$

$$\omega_0^0 - \omega_3^3 = \alpha_k\,\omega^k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = \beta_k\,\omega^k.$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1, 2$; $i \neq j$, суммирование по i и j не производится, а также линейно независимые формы $\omega_0^i \overset{def}{=} \omega^i$ приняты в качестве базисных.

Определение. Коникой C_0 называется коника, лежащая в сечении квадрики Q плоскостью $A_1A_2A_3$.

Определение. Конгруэнцией K называется конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$, удовлетворяющая условиям:

1/ прямые A_iA_3 принадлежат характеристическому многообразию ранга 1 конгруэнции (Q), ассоциированной с конгруэнцией $(P,Q)_{2,2}$; 2/ индуцированная пара (C), (C_0) конгруэнций коник C и C_0 расслояема, т.е. имеют место расслоения от каждой из конгруэнций (C), (C_0) к конгруэнции (A_0A_3) прямых, инцидентных полюсам линии пересечения плоскостей коник C и C_0 относительно этих коник; 3/ координатная сеть на поверхности (A_0) является асимптотической.

Теорема 1. Конгруэнция K существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Доказательство. Характеристическое многообразие ранга 1 конгруэнции (Q) задается системой уравнений:

$$F_i \equiv \gamma_{1i}^2 (x^1)^2 + \gamma_{2i}^1 (x^2)^2 + \alpha_i (x^3)^2 + (1 - \gamma_{ji}^0) x^0 x^j - \gamma_{ii}^0 x^0 x^i -$$

$$- \gamma_{3i}^0 x^0 x^3 + \beta_i x^1 x^2 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i x^3 + (\gamma_{3i}^i - a) x^j x^3 = 0. \quad (3)$$

Учитывая первое требование определения конгруэнции K, из последней системы получаем условия

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_0^0 = \omega_3^3, \quad \omega_3^i = \omega_j^3, \quad (4)$$

замыкая которые, приходим к следствиям:

$$\omega_i^0 = m\,\omega^j, \quad (5)$$

$$\omega_3^0 = (a\beta_1 - \gamma_{11}^3 \beta_2)\omega^1 + (a\beta_2 - \gamma_{22}^3 \beta_1)\omega^2,$$

где $m \overset{def}{=} \gamma_{12}^0 = \gamma_{21}^0$.

Условия расслоения от конгруэнции (C) коник C к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) записываются в виде:

$$\omega_i^j \wedge \omega^j = 0, \quad \omega_i^0 \wedge \omega^j + \omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0,$$

$$(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0) \wedge \omega^i + \omega^j \wedge \omega_j^i = 0, \quad (6)$$

$$2\omega^1 \wedge \omega^2 + \omega_1^0 \wedge \omega^1 - \omega_2^0 \wedge \omega^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0.$$

Расслоение от конгруэнции (C_0) коник C_0 к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) задается следующими условиями:

$$\omega_i^j \wedge \omega_3^j = 0, \quad \omega_i^0 \wedge \omega^j + \omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0,$$

$$(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) \wedge \omega_3^i - 2\omega_3^0 \wedge \omega^i + \omega_3^j \wedge \omega_j^i = 0, \quad (7)$$

$$\omega_3^1 \wedge (\omega_3^2 - \omega_1^3) + \omega_3^2 \wedge (\omega_2^3 - \omega_3^1) + \omega_1^0 \wedge \omega^1 - \omega_2^0 \wedge \omega^2 = 0.$$

Подставляя выражения (4) и (5) в систему квадратичных уравнений (6), (7), находим из нее

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^0 = 0. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) внешним образом с учетом всех полученных соотношений и системы (2), получаем следствие

$$a^2 = 1 + \gamma_{11}^3 \gamma_{22}^3. \quad (9)$$

Последнее требование определения конгруэнции K дает условия $\gamma_{ii}^3 = 0$, учитывая которые в соотношении (9), находим $|a| = 1$.

Таким образом, система Пфаффа конгруэнции K приводится к виду:

$$\begin{aligned} &\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^0 = 0, \quad \omega_0^0 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_0^3 = 0, \\ &\omega_3^0 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_i^3 = \omega_3^j = a\,\omega^j, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a=\pm 1$.Замыкание системы (10) удовлетворяется тождественно, что и доказывает теорему.

В дальнейшем будем считать $a=1$,т.к.случай $a=-1$ приводит к проективно эквивалентному классу.

Определение. Инвариантные квадрики, определяемые уравнениями $F_i=0$ из системы (3), названы квадриками Q_i.

Теорема 2. Конгруэнция K обладает свойствами: 1/прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) является связкой с центром в точке $E^*_{03}=A_0-A_3$; 2/имеет место расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2); 3/характеристическое многообразие ранга 1 конгруэнции (Q) квадрик Q представляет собой неподвижную плоскость $A_1A_2A_3$, при этом каждая из ассоциированных квадрик Q_i распадается на пару плоскостей $A_0A_iA_3$ и $A_iA_jA_3$; 4/коника C_0 служит фокальным многообразием конгруэнции (Q) квадрик Q.

Доказательство. 1/утверждение следует из равенства $d\bar{E}^*_{03}=0$;

2/условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) в силу системы (9) удовлетворяются тождественно;

3/система уравнений (3) характеристического многообразия конгруэнции (Q) квадрик Q приводится к виду:

$$F_1\equiv x^0x^2=0,$$

$$F_2\equiv x^0x^1=0,$$

откуда, учитывая, что $dx^0\equiv 0$,получаем требуемое;

4/последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из предыдущего.

Теорема 3: 1/поверхность (A_0) является квадрикой, определяемой уравнением

$$\Gamma\equiv(x^3)^2+2x^0x^3-2x^1x^2=0,$$

для которой прямые A_0A_i , $A_0\mathcal{D}$,где $\mathcal{D}=A_0-2A_3$, служат прямолинейными образующими; 2/линия пересечения квадрики (A_0) с квадрикой Q распадается на пару

коник C_0 и S ,где S -сечение квадрики Q плоскостью $x^0=2x^3$.

Доказательство: 1/координаты произвольной точки A_0 поверхности (A_0) удовлетворяют уравнению

$$\Gamma\equiv(x^3)^2+2x^0x^3-2x^1x^2=0,$$

причем $d\Gamma|_{\Gamma=0}=0$.Рассматривая сечения квадрики $\Gamma=0$ плоскостями $A_0A_iA_3$, находим ее прямолинейные образующие A_0A_i и $A_0\mathcal{D}$;

2/общие точки квадрики (A_0) и квадрики Q определяются системой уравнений (1),(10), которая приводит к двум решениям:

$$\begin{cases}x^0=0,\\(x^3)^2-2x^1x^2=0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x^0=2x^3,\\5(x^3)^2-2x^1x^2=0,\end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.- Труды геом.семинара .М., ВИНИТИ, 3, 1971, с.193-220.

2. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3.Калининград, 1973, с.50-59.