5. *Sasaki S.* Almost contact manifolds // Lect. Notes. V.1; 1965. V.2;1967.

L.V. S t e p a n o v a, M.B. B a n a r u

ON HYPERSURFACES OF QUASIKAHLERIAN MANIFOLDS

Most important example of almost contact metric structures, determining their in the differential geometry to a great extent, is structures, induced on the hypersurface of almost hermitean manifolds. Above mentioned structures were studied such distinguished geometrician as Bler, Goldberg, Sasaki et setera. The case is investigated when on the orientable hipersurface of quasi-kählerian manifolds quasi-sasakian structura - is induced.

УДК 514.75

А.В. С т о л я р о в

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ И СЕТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ

Исследуется внутренняя геометрия сетей, заданных на регулярной гиперполосе H_m, относительно аффинных связностей, индуцируемых при нормализации подмногообразия H_m. Основные результаты работы доложены на конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова [8].

Индексы принимают следующие значения: $i, j, k, l, s, t = \overline{1, m}$.

Рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [1], погруженную в n-мерное проективное пространство P_n ($m < n - 1$) и нормализованную в смысле Нордена-Чакмазяна [3], [10] полями квазитензоров ν_n^i и ν_i^0 [9]. А.В. Чакмазян показал [10], что на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ индуцируются две двойственные симметрические аффинные связности $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ (первого и второго родов); но следует заметить, что геометрия этих связностей им исследована довольно слабо. В работах [4], [6], нами получен ряд результатов по изучению геометрии связностей $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$:

- связность $\overset{12}{\nabla}$, средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}$, является вейлевой; условием ее римановости является обращение в нуль кососимметричного тензора $\mathrm{T}^0_{ij}(v)\overset{def}{=}=v^0_{[ij]}-v^s_{n[i}\Lambda^n_{j]s}$;

- связности $\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые взаимной нормализацией подмногообразия $\mathrm{H}_m\subset\mathrm{P}_n$, могут быть эквиаффинными лишь одновременно, ибо $2\overset{1}{r}_{[st]}=2\overset{2}{r}_{[st]}=m\mathrm{T}^0_{st}$;

- двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией Фубини (F^i_n,F^0_i) гиперполосы, эквиаффинны, а их средняя связность риманова с метрическим тензором Λ^n_{ij};

- если при некоторой взаимной нормализации гиперполосы H_m тензоры Риччи $\overset{1}{r}_{is},\overset{2}{r}_{is}$ совпадают, то данная нормализация есть нормализация Вильчинского $(-W^i_n,W^0_i)$.

В работе [9] доказано, что на двойственно нормализованной регулярной гиперполосе $\mathrm{H}_m\subset\mathrm{P}_n$ кроме двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}$ индуцируются еще две аффинные связности без кручения; формы $\{\overset{p}{\theta}{}^i_0,\overset{p}{\theta}{}^i_j\}$ симметрических аффинных связностей $\overset{p}{\nabla}(p=\overline{1,4})$ имеют следующие строения:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_0=\omega^i_0,\overset{1}{\theta}{}^i_j=\omega^i_j-\delta^i_j(\omega^0_0-v^0_k\omega^k_0)-v^i_n\omega^n_j+v^0_j\omega^i_0;$$

$$\overset{2}{\theta}{}^i_0=\omega^i_0,\overset{2}{\theta}{}^i_j=\overset{1}{\theta}{}^i_j+\left(\frac{1}{m+2}\Lambda^{ik}_nD^n_{kjs}+2\delta^i_{(j}\mathrm{T}^0_{s)}+\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{js}\mathrm{T}^0_k\right)\omega^s_0;\qquad(1)$$

$$\overset{3}{\theta}{}^i_0=\omega^i_0,\overset{3}{\theta}{}^i_j=\overset{1}{\theta}{}^i_j+\frac{1}{m+2}\Lambda^{ik}_nD^n_{kjs}\omega^s_0;\overset{4}{\theta}{}^i_0=\omega^i_0,\overset{4}{\theta}{}^i_j=\overset{3}{\theta}{}^i_j-2\delta^i_{(j}\mathrm{T}^0_{s)}\omega^s_0;$$

здесь Λ^n_{ij} – главный фундаментальный тензор 1-го порядка, D^n_{ijk} – тензор Дарбу 2-го порядка гиперполосы и

$$\mathrm{T}^0_i(v)\overset{def}{=}\frac{\Lambda_i}{m+2}-v^0_i+\Lambda^n_{ik}v^k_n$$

- тензор взаимности ее нормализации (т. е. обращение в нуль тензора T^0_i есть условие взаимности нормализации гиперполосы).

Из строения (1) форм аффинных связностей $\overset{p}{\nabla}$ следует справедливость следующих утверждений:

Теорема 1. *Аффинные связности* $\overset{3}{\nabla},\overset{4}{\nabla}$ *обладают общими геодезическими линиями.*

Теорема 2. *Совпадение любых двух связностей из совокупности* $\{\overset{2}{\nabla},\overset{3}{\nabla},\overset{4}{\nabla}\}$ *равносильно вырождению* $\overset{2}{\nabla}\equiv\overset{3}{\nabla}\equiv\overset{4}{\nabla}$, *что эквивалентно условию взаимности нормализации гиперполосы* H_m.

Пусть на гиперполосе $H_m \subset P_n$ задана сеть $\Sigma_m \subset H_m$ [5]; в репере, отнесенном к ней, дифференциальные уравнения сети имеют вид:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k, i \neq j.$$

Так как условием параллельного перенесения направления A_0M, $M = \lambda^i(v_i^0 A_0 + A_i)$, принадлежащего касательной плоскости $T_m(A_0)$ базисной поверхности V_m гиперполосы H_m, вдоль кривой $l \subset V_m$ в аффинной связности ∇, определяемой формами $\{\theta^i, \theta_j^i\}$, является выполнение уравнений

$$d\lambda^i + \lambda^j \theta_j^i = \Theta \lambda^i (\operatorname{mod} l),$$

то на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$ имеем следующие условия параллельного перенесения направления A_0A_i касательной к i-й линии сети Σ_m вдоль ее k-й линии в аффинных связностях $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}, \overset{3}{\nabla}, \overset{4}{\nabla}$ соответственно:

$$a_{ik}^j - v_n^j \Lambda_{ik}^n + v_i^0 \delta_k^j = 0, i \neq j; \tag{2}$$

$$a_{ik}^j + \Lambda_n^{jl}(\Lambda_{lik}^n - \Lambda_{ki}^n v_l^0) + \delta_k^j \Lambda_{li}^n v_n^l = 0, i \neq j; \tag{3}$$

$$a_{ik}^j + \Lambda_n^{jl}\left(\Lambda_{lik}^n - \Lambda_{ik}^n \frac{\Lambda_l}{m+2}\right) + \delta_k^j \left(v_i^0 - \frac{\Lambda_i}{m+2}\right) - \Lambda_{ik}^n v_n^j = 0, i \neq j; \tag{4}$$

$$a_{ik}^j + \Lambda_n^{jl}\left(\Lambda_{lik}^n - \Lambda_{ik}^n \frac{\Lambda_l}{m+2}\right) - 2\delta_k^j T_i^0(v) + 2\delta_k^{[j} v_n^{l]} \Lambda_{il}^n, i \neq j. \tag{5}$$

Если сеть $\Sigma_m \subset H_m$ – сопряженная относительно поля тензора Λ_{ik}^n, то справедливо:

$$\Lambda_{ij}^n = 0, i \neq j; \tag{6}$$

$$\Lambda_{ijk}^n = -(\Lambda_{ii}^n a_{jk}^i + \Lambda_{jj}^n a_{ik}^j), i \neq j. \tag{7}$$

В силу соотношений (6), (7) условия (2)-(5) запишутся в виде:

$$a_{ik}^j - v_n^j \Lambda_{ik}^n + v_i^0 \delta_k^j = 0, i \neq j; \tag{8}$$

$$\Lambda_n^{jj}(\Lambda_{ik}^n v_j^0 + \Lambda_{ii}^n a_{jk}^i) - \delta_k^j \Lambda_{ii}^n v_n^i = 0, i \neq j; \tag{9}$$

$$\delta_k^j\left(v_i^0 - \frac{\Lambda_i}{m+2}\right) - \Lambda_n^{jj}\left(\Lambda_{ii}^n a_{jk}^i + \Lambda_{ik}^n \frac{\Lambda_j}{m+2}\right) - \Lambda_{ik}^n v_n^j = 0, i \neq j; \tag{10}$$

$$\Lambda_n^{jj}\left(\Lambda_{ii}^n a_{jk}^i + \Lambda_{ik}^n \frac{\Lambda_j}{m+2}\right) + 2\delta_k^j T_i^0(v) - \delta_k^j \Lambda_{ii}^n v_n^i + v_n^j \Lambda_{ik}^n = 0, i \neq j. \tag{11}$$

Из соотношений (8)-(11) следуют условия геодезичности ($k = i$) сети Σ_m, сопряженной относительно поля тензора Λ_{is}^n, в связностях $\overset{p}{\nabla}, p = \overline{1,4}$:

$$\overset{1}{\nabla}: a_{ii}^j - v_n^j \Lambda_{ii}^n = 0, i \neq j; \tag{12}$$

$$\overset{2}{\nabla}: a_{ji}^i + v_j^0 = 0, i \neq j, \text{ по } i \text{ нет суммирования}; \tag{13}$$

$$\overset{3}{\nabla} \text{ (или } \overset{4}{\nabla}\text{)}: v_n^j = -\Lambda_n^{jj}\left(a_{ji}^i + \frac{\Lambda_j}{m+2}\right), i \neq j, \text{ по } i \text{ нет суммирования}; \tag{14}$$

эти сети назовем геодезическими, соответственно, первого, второго, третьего (четвертого) родов.

Аналогично, из соотношений (8)-(11) следуют условия, при выполнении которых сеть $\Sigma_m \subset H_m$, сопряженная относительно поля тензора Λ^n_{is}, является чебышевской $(k \neq i)$ в связностях $\overset{p}{\nabla}$:

$$\overset{1}{\nabla}: a^j_{il} + v^0_i \delta^j_l = 0, i \neq j, l; \tag{15}$$

$$\overset{2}{\nabla}: \delta^j_l v^i_n - \Lambda^{jj}_n a^i_{jl} = 0, i \neq j, l; \tag{16}$$

$$\overset{3}{\nabla}: \Lambda^{jj}_n \Lambda^n_{ii} a^i_{jl} - \delta^j_l v^0_i + \delta^j_l \frac{\Lambda_i}{m+2} = 0, i \neq j, l; \tag{17}$$

$$\overset{4}{\nabla}: \delta^j_l \left(2v^0_i - 2\frac{\Lambda_i}{m+2} - \Lambda^n_{ii} v^i_n \right) - \Lambda^{jj}_n \Lambda^n_{ii} a^i_{jl} = 0, i \neq j, l; \tag{18}$$

эти сети назовем, соответственно, чебышевскими первого, второго, третьего и четвертого родов.

Известно [5], [7], что в случае сети $\Sigma_m \subset H_m$, сопряженной относительно поля тензора Λ^n_{is}, точки $F^j_i = -a^j_{ij} A_0 + A_i, i \neq j$ на касательных к ее линиям и их двойственные образы - гиперплоскости $\eta^j_i = \Lambda^{jj}_n \Lambda^n_{ii} a^i_{jj} \xi_0 + \xi_i, i \neq j$ - являются инвариантными и называются, соответственно, псевдофокусами [2] и псевдофокальными гиперплоскостями [5] сети; $(n - m)$-мерная и $(m - 1)$-мерная гармонические плоскости $[\eta_i]$ и $[F_i]$ этой сети, где

$$\eta_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} \eta^j_i, F_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} F^j_i, \tag{19}$$

определяются квазитензорами

$$q^i_n = \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} a^i_{jj} \Lambda^{jj}_n, q^0_i = -\frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} a^j_{ij}. \tag{20}$$

Поля квазитензоров (20) задают инвариантную двойственную нормализацию гиперполосы $H_m \subset P_n$ полями гармонических плоскостей сети $\Sigma_m \subset H_m$.

В случае сети $\Sigma_m \subset H_m$, сопряженной относительно поля тензора Λ^n_{is}, справедливы следующие предложения [5]:

- нормализация гиперполосы $H_m \subset P_n$ полями гармонических плоскостей является взаимной тогда и только тогда, когда сеть Σ_m есть сеть Дарбу (т.е. направления касательных $A_0 A_i$ к линиям сети принадлежат конусу направлений Дарбу 3-го порядка $D^n_{ist} \omega^i_0 \omega^s_0 \omega^t_0 = 0$);

- для гиперполосы $H_m \subset P_n$, имеющей касание третьего порядка с полем соприкасающихся гиперквадрик ($D^n_{ist} \equiv 0$), поля гармонических плоскостей сети Σ_m нормализуют гиперполосу взаимно;

- сеть $\Sigma_m \subset H_m$ является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями η^j_i (псевдофокусами F^j_i) тогда и только тогда, когда относительно поля гармонических плоскостей $[\eta_i]$ $([F_i])$ данная сеть является геодезической первого (второго) рода.

Теорема 3. *Если сеть $\Sigma_m \subset \mathrm{H}_m$, сопряженная относительно поля тензора Λ^n_{is} гиперполосы, есть чебышевская (геодезическая) третьего рода, то она является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями η^j_i (псевдофокусами F^j_i) и поле нормалей второго рода v^0_i (первого рода v^i_n) взаимно полю гармонических плоскостей $q^i_n(q^0_i)$ сети, т. е.*

$$\mathrm{T}^0_i = \frac{\Lambda_i}{m+2} - v^0_i + \Lambda^n_{ii} q^i_n = 0 \quad \left(\mathrm{T}^0_i = \frac{\Lambda_i}{m+2} - q^0_i + \Lambda^n_{ii} v^i_n = 0\right);$$

при этом поле нормалей первого v^i_n (второго v^0_i) рода - любое; одновременно является чебышевской и геодезической четвертого рода (в предположении, что она не есть сеть Дарбу или, что то же самое, нормализация $\{v^i_n, v^0_i\}$ не взаимная), то компоненты полей нормализующих объектов определяются охватами

$$v^i_n = \Lambda^{ii}_n\left(q^0_i - \frac{\Lambda_i}{m+2}\right), v^0_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_i}{m+2} + q^0_i + \Lambda^n_{ii} q^i_n\right);$$

при этом справедливо

$$\mathrm{T}^0_i(v) \equiv \frac{\Lambda_i}{m+2} - v^0_i + \Lambda^n_{ii} v^i_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_i}{m+2} - q^0_i + \Lambda^n_{ii} q^i_n\right) \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{T}^0_i(q) \neq 0.$$

Библиографический список

1. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. М.: Изд-во МГУ, 1950. Вып. 8. С. 197-272.

2. *Базылев В.Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Изв. вузов. Математика. 1966. № 2. С. 9-19.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

4. *Столяров А.В.* Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Там же. 1975. № 11. С. 106-108.

5. *Столяров А.В.* О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе // Там же. 1977. № 8. С. 68-78.

6. *Столяров А.В.* Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1977. Т.8. С. 25-46.

7. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994. 290 с.

8. *Столяров А.В.* Аффинные связности и сети на регулярной гиперполосе // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань, 1999. С.207-208.

9. *Столяров А.В.* Двойственные аффинные связности на регулярной гиперполосе // Изв. вузов. Математика. 1999. № 9.С.55-63.

10. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // ДАН Арм. ССР. 1959. № 4. С.151-157.

A.V. S t o l y a r o v

AFFINE CONNECTIONS AND WEBS ON A REGULAR HYPERSTRIP

The interior geometry of webs on a regular hyperstrip H_m , concerning four symmetrical affine connections inducet with normalization of a submanifold H_m , immersed in n-dimensional projective space P_n ($m < n$ -1), is studied.