4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С. 5 – 247.

A. Skriagina

INDUCED BUNCH OF CONNECTIONS OF THE FIRST TYPE ON THE PLANE SURFACE AS DEGENERATED FAMILY

The centered plane surface as the degenerated family, described by triple of point, generator and tangent planes is considered in the projective space. The principal bundle associated with the surface, the typical fiber of which is a subgroup of stationarity of triple. Composition equipment of plane surface, consisted in adding to each point three planes, supplemented accordingly: 1) plane to generator; 2) generator to tangent plane; 3) tangent plane to space is made. The concepts of bunch of group connections of the first type, first and second pre-bunch, first and second weak pre-bunch and linear combination first and second pre-bunch are entered. It is proved, that composition equipment of plane surface induces bunch of group connection of the first type.

УДК 514.76

А.Я. Султанов, Н.С. Султанова
(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ АФФИННЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть (E,π,M) – гладкое локально тривиальное расслоение со стандартным слоем F; $\tilde{\nabla}$ – проектируемая линейная связность на E, а G – группа аффинных автоморфизмов расслоения (E,π,M). Доказано, что G – группа Ли и $dimG \le n^2 + (m+1)(m+n)$, где $n = dimM$, $m = dimF$.

§ 1. Основные определения и факты

Пусть (E,π,M) – гладкое локально тривиальное расслоение над связным гладким класса C^∞ многообразием M. Предположим, что

M и E конечномерны и $n = dim M, m = dim F$, где F – стандартный слой расслоения.

Диффеоморфизм $\Phi : E \to E$ называется автоморфизмом, расслоенным над диффеоморфизмом $\varphi : M \to M$, если $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Phi$ [1]. Рассмотрим диффеоморфизмы Φ_0, расслоенные над тождественным отображением id_M базы расслоения. Очевидно, $id_M \circ \pi = \pi \circ id_M$. Заметим, что для каждой точки $p_x \in E$ ее образ $\Phi_0(p_x)$ принадлежит слою $\pi^{-1}(x)$ над x. Действительно, $\pi(\Phi_0(p_x)) = \pi\Phi_0(p_x) = id_M \circ \pi(p_x) = id_M(x) = x$. Отсюда следует, что ограничение диффеоморфизма Φ_0 на каждый слой F_x является диффеоморфизмом этого слоя на себя.

Предложение 1.1. *Автоморфизм Φ является расслоенным над диффеоморфизмом φ тогда и только тогда, когда Φ^{-1}– автоморфизм расслоенный над φ^{-1}.*

Доказательство. Условие $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Phi$ равносильно условию $id_M \circ \pi = \varphi^{-1} \circ (\pi \circ \Phi)$. Отсюда получим $\pi \circ \Phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \pi$.

Предложение 1.2. *Если Φ_1 и Φ_2 – автоморфизмы расслоения (E,π,M) над диффеоморфизмом $\varphi : M \to M$, то существуют автоморфизмы Φ_0 и Ψ_0 над id_M такие, что $\Phi_2 = \Phi_1 \circ \Phi_0$ и $\Phi_2 = \Psi_0 \circ \Phi_1$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Phi_1$ и $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Phi_2$. Тогда в силу предложения 1.1 имеет место равенство $\pi \circ \Phi_1^{-1} = \pi \circ \Phi_2^{-1}$. Отсюда получим $\pi \circ id_E = \pi \circ (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)$. Так как $\pi \circ id_E = id_M \circ \pi$, то диффеоморфизм $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ является автоморфизмом расслоения (E,π,M) над id_M. Положим $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \Phi_0^{-1}$. Отсюда следует, что $\Phi_2 = \Phi_1 \circ \Phi_0$.

Из равенства $\pi \circ \Phi_1 = \pi \circ \Phi_2$ следует равенство $id_M \circ \pi = \pi \circ (\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})$. Это равенство означает, что диффеоморфизм $\Psi_0 = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ является автоморфизмом над id_M. Значит, $\Phi_2 = \Psi_0 \circ \Phi_1$.

Предложение 1.3. 1. *Множество G всевозможных автоморфизмов расслоения (E,π,M) образует группу относительно композиции автоморфизмов.*

2. Множество $G_0 \subset G$ всевозможных автоморфизмов над id_M относительно композиции является нормальным делителем группы $(G,\circ)$.

Доказательство 1. Композиция автоморфизмов ассоциативна, автоморфизм id_E является нейтральным элементом относительно композиции автоморфизмов. Пусть Φ и Ψ – автоморфизмы расслоения (E,π,M) над диффеоморфизмами φ и ψ соответственно. Тогда

$$\pi\circ(\Phi\circ\Psi)=(\pi\circ\Phi)\circ\Psi=(\varphi\circ\pi)\circ\Psi=\varphi\circ(\pi\circ\Psi)=\varphi\circ(\psi\circ\pi)=(\varphi\circ\psi)\circ\pi .$$

Отсюда следует, что $\Phi\circ\Psi$ - автоморфизм над $\varphi\circ\psi$. Значит, алгебра $(G,\circ)$ – группа.

2. Пусть $\Phi_0 \in G_0$ и $\Psi_0 \in G_0$. Рассмотрим композицию $\Phi_0\circ\Psi_0^{-1}$. Имеем: $\pi\circ\left(\Phi_0\circ\Psi_0^{-1}\right)=(\pi\circ\Phi_0)\circ\Psi_0^{-1}=(id_M\circ\pi)\circ\Psi_0^{-1}=id_M\circ\left(\pi\circ\Psi_0^{-1}\right)=$ $=id_M\circ(id_M^{-1}\circ\pi)=id_M\circ\pi$. Следовательно, $\Phi_0\circ\Psi_0^{-1}\in G_0$. Значит, $(G_0,\circ)$ – подгруппа группы $(G,\circ)$. Для произвольных $\Phi_0\in G_0$ и $\Psi\in G$ рассмотрим композицию $\Psi^{-1}\circ\Phi_0\circ\Psi=\Psi^{-1}\circ(\Phi_0\circ\Psi)$. В силу предложения 1.2 существует автоморфизм $\Psi_0\in G_0$ такой, что

$$\Phi_0\circ\Psi=\Psi\circ\Psi_0 .\ \text{Тогда}\ \Psi^{-1}\circ\Phi_0\circ\Psi=\Psi^{-1}\circ(\Psi\circ\Psi_0)=\Psi_0 .$$

Таким образом, $\Psi^{-1}\circ\Phi_0\circ\Psi\in G_0$. Тем самым мы убедились в том, что G_0 – нормальный делитель группы G.

§ 2. Проектируемые линейные связности на (E,π,M) и их аффинные автоморфизмы

Как известно, векторное поле $\tilde{X}$ на E называется проектируемым, если существует векторное поле X на базе M расслоения, что выполняется равенство $d\pi\tilde{X}=X$, где $d\pi$ – дифференциал канонической проекции.

Линейная связность $\tilde{\nabla}$ на E называется проектируемой, если существует линейная связность ∇ на базе M такая, что для любых проектируемых векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ имеет место равенство $d\pi\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)=\nabla_{d\pi\tilde{X}}d\pi\tilde{Y}$ [2].

Диффеоморфизм $\varPhi : E \to E$ называется аффинным, если $d\varPhi\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right) = \tilde{\nabla}_{d\varPhi\tilde{X}} d\varPhi\tilde{Y}$ для любых векторных полей $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ на E. Здесь $d\varPhi$ является дифференциалом отображения $\varPhi$. Мы будем рассматривать такие аффинные преобразования пространства E, которые являются и автоморфизмами расслоения (E,π,M).

Предложение 2.1. *Пусть $\varPhi : E \to E$ – аффинный автоморфизм над $\varphi : M \to M$ расслоения (E,π,M), снабженного проектируемой линейной связностью $\tilde{\nabla}$. Тогда φ - аффинное преобразование пространства (M,∇).*

Доказательство. Пусть $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ - произвольные проектируемые векторные поля и $d\pi\tilde{X} = X$, $d\pi\tilde{Y} = Y$. Так как $\varPhi$ - аффинный автоморфизм, то

$$d\pi\left(d\varPhi\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)\right) = d\pi\left(\tilde{\nabla}_{d\varPhi\tilde{X}} d\varPhi\tilde{Y}\right) = \nabla_{d\pi\left(d\varPhi\tilde{X}\right)} d\pi\left(d\varPhi\tilde{Y}\right). \qquad (1)$$

Поскольку $d\pi \circ d\varPhi = d(\pi \circ \varPhi)$, а $\pi \circ \varPhi = \varphi \circ \pi$, то $d\pi \circ d\varPhi = d\varphi \circ d\pi$. Поэтому равенство (1) примет следующий вид:

$$d\varphi\left(d\pi\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)\right) = \nabla_{d\varphi X} d\varphi Y .$$

Отсюда получим $d\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\varphi X} d\varphi Y$. Утверждение доказано.

Пусть $\varPhi$ и $\varPsi$ – аффинные автоморфизмы над φ и ψ соответственно. В силу предложения 2.1 φ и ψ – аффинные преобразования базы (M,∇). Композиция $\varPhi \circ \varPsi$ – автоморфизм расслоения (E,π,M) над $\varphi \circ \psi$, а так как $\varPhi$, $\varPsi$ – аффинные преобразования, то их композиция $\varPhi \circ \varPsi$ и ее проекция $\varphi \circ \psi$ – аффинные преобразования. Следовательно, композиция $\varPhi \circ \varPsi$ – аффинный автоморфизм расслоения (E,π,M) над аффинным преобразованием $\varphi \circ \psi$. Преобразование $\varPhi^{-1}$, обратное аффинному автоморфизму $\varPhi$ расслоения, является аффинным автоморфизмом. Это следует из предложения 1.1 и из того, что обратное преобразование к аффинному преобразованию – аффинное преобразование. Преобразование id_E является аффинным автоморфизмом. Отсюда получаем, что множество всевозможных аффинных автоморфизмов расслоения (E,π,M) является группой. Эта группа G является подгруппой группы Ли всех аффинных преобразований расслоения (E,π,M) с проектируемой связностью $\tilde{\tilde{\nabla}}$. Из условия $\varphi \circ \pi = \pi \circ \Phi$, которому удовлетворяют преобразования группы G, следует, что группа G – замкнутая подгруппа группы Ли всех аффинных преобразований расслоения (E,π,M). Следовательно, группа всех аффинных автоморфизмов расслоения (E,π,M) является группой Ли. Таким образом, имеет место следующее

Предложение 2.2. *Группа G всех аффинных автоморфизмов расслоения (E,π,M) с проектируемой связностью $\tilde{\tilde{\nabla}}$ является группой Ли.*

Из предложения 1.3 следует, что группа аффинных автоморфизмов G_0 над группой $\{id_M\}$ является нормальным делителем.

В заключение отметим, что имеет место следующее

Предложение 2.3. *1. Размерность группы G аффинных автоморфизмов расслоения (E,π,M) с проектируемой связностью $\tilde{\tilde{\nabla}}$ не больше, чем $n^2+(m+1)(m+n)$.*

2. Размерность нормального делителя G_0 группы G не больше, чем $m(m+n+1)$.

Список литературы

1. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970. 442 с.
2. *Шапуков Б.Н.* Связности на дифференцируемых расслоениях // Проблемы геометрии. М., 1983. Т. 15. С. 61 – 93.

A. Sultanov, N. Sultanova

ABOUT AFFINE AUTOMORPHISMS LOCALLY TRIVIAL BUNDLES

Let (E,π,M) be smooth local trivial bundle with standart fibre F, $\tilde{\tilde{\nabla}}$ is projected linear connection of E, G is a group of affine automorfisms of bundle (E,π,M). Proved that G is Lie group and $dimG \le n^2+(m+1)(m+n)$, where $n = dimM$, $m = dimF$.