ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассмотрена конгруэнция H эллипсоидов, центры которых описывают торс, не вырождающийся в плоскость. Исследован класс H_0, который разбивается на два подкласса: конгруэнции $H_{0,1}$ и конгруэнции $H_{0,2}$, для каждого из которых получены некоторые геометрические свойства.

Рассмотрим конгруэнции H эллипсоидов Q, центры которых описывают торс, не вырождающийся в плоскость. Отнесем конгруэнцию H к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, где вектор $\vec{e}_3$ сопряжен относительно Q касательной плоскости к поверхности (A), направлен по прямолинейной образующей поверхности (A), а $\vec{e}_2$ сопряжен относительно Q векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, причем концы векторов $\overline{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ расположены на эллипсоиде.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции H запишется в виде:

$$\omega^3=0,\ \omega^3_1=0,\ \omega^3_2=h\,\omega^2,\ \omega^2_1=s^2_2\omega^2,\ \omega^1_2=s^1_1\omega^1+s^1_2\omega^2,$$
$$\theta^i_3=\tau^i_k\theta^k,\ \theta^i_i=c^i_k\omega^k=0,\ \omega^3_3=c_k\omega^k,\ h\neq 0\ (i,j,k=1,2), \tag{1}$$

где

$$\theta^i_3=\omega^i_3+\omega^3_i,\qquad \theta^i_i=\omega^i_i-\omega^3_3.$$

Уравнения эллипсоида Q, ассоциированных квадрик Q_1, Q_2 принимают соответственно вид:

$$\mathcal{F}\equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0, \tag{2}$$

$$\mathcal{F}_i\equiv c^i_i(x^i)^2+c^j_i(x^j)^2+\lambda_i x^1x^2+(\tau^i_i x^i+\tau^j_i x^j)x^3+x^i+c_i=0, \tag{3}$$

где

$$\lambda_1=s^2_1+s^1_1,\ \ \lambda_2=s^1_2. \tag{4}$$

Из системы (I) следует, что конгруэнция H определяется с произволом шести функций двух аргументов.

Обозначим через M_α конец вектора $\overline{e}_\alpha$, M^*_α - конец вектора $-\overline{e}_\alpha$, ℓ_α -прямую, проходящую через центр эллипсоида Q и конец вектора $\overline{e}_\alpha$, α_β -плоскость $x^\beta=0$.

Анализируя систему уравнений

$$\mathcal{F}=0,\ \ \mathcal{F}_1=0,\ \ \mathcal{F}_2=0, \tag{5}$$

убеждаемся, что конгруэнция H обладает следующими свойствами:

I/Если точка M_3 является фокальной точкой квадрики Q [1], то и точка M^*_3 является ее фокальной точкой, и наоборот;

2/Точки M_i и M^*_i не могут быть одновременно фокальными точками квадрики Q.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией H_0 называется конгруэнция H, у которой M_α являются фокальными точками эллипсоида Q.

Т е о р е м а I. Существует два и только два класса конгруэнций H_0 конгруэнции $H_{0,1}$ и конгруэнции $H_{0,2}$. Каждый класс определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3) следует

$$c_i=0,\ \ c^i_i=-1,\ \ c^j_i=0. \tag{6}$$

Система пфаффовых уравнений $\theta^i_i=c^i_k\omega^k$, $\omega^3_3=c_k\omega^k$

в силу (6) приводится к виду:

$$\omega_i^i + \omega^i = 0, \quad \omega_3^3 = 0 \qquad (7)$$

Замыкая эти уравнения, получим:

$$s_1^1(s_2^2+1) = 0, \quad s_2^2(s_1^1+1) = 0, \quad \tau_1^2 = 0. \qquad (8)$$

Из (8) выделяются только два случая

$$s_1^1 = 0, \quad s_2^2 = 0, \quad \tau_1^2 = 0, \qquad (9)$$

$$s_1^1 = -1, \quad s_2^2 = -1. \qquad (10)$$

В первом случае система (1) приводится к виду

$$\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ \omega_1^2 = 0, \ \omega_i^i + \omega^i = 0, \ \omega_3^3 = 0, \ \omega_2^3 = h\omega^2,$$
$$\omega_2^1 = s_2^1\omega^2, \ \omega_3^1 = \tau_1^1\omega^1 + \tau_2^1\omega^2, \ \omega_3^2 = (\tau_2^2 - h)\omega^2 \qquad (11)$$

и определяется с произволом одной функции двух аргументов. Во втором случае система (I) приводится к виду:

$$\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ \omega_1^2 + \omega^2 = 0, \ \omega_i^i + \omega^i = 0, \ \omega_3^3 = 0, \ \omega_2^3 = h\omega^2,$$
$$\omega_2^1 = -\omega^1 + s_2^1\omega^2, \ \omega_3^1 = \tau_1^1\omega^1 + \tau_2^1\omega^2, \ \omega_3^2 = (\tau_2^2 - h)\omega^2 \qquad (12)$$

и имеет такое же решение.

Назовем конгруэнции, определяемые системами (II) и (I2) соответственно конгруэнциями $H_{0,1}$ и $H_{0,2}$.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции H_0 обладают следующими свойствами: 1/одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) высекает на торсе (A) его прямолинейные образующие; 2/поверхность (M_3) является торсом с прямолинейными образующими, коллинеарными ℓ_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/В силу (8) уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) приводится к виду:

$$\omega^2\left((\tau_2^2 - \tau_1^1 - 1)\omega^1 - \tau_2^1\omega^2\right) = 0, \qquad (13)$$

откуда следует, что $\omega^2 = 0$ определяет торсы.

2/Имеем:

$$dM_3\Big|_{\omega^2=0} = d(A + \bar{e}_3)\Big|_{\omega^2=0} = \left((1+\tau_1^1)\bar{e}_1 + \tau_1^2\bar{e}_2\right)\omega^1. \qquad (14)$$

Учитывая (8) и (1) убеждаемся, что линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (M_3)-прямые. Уравнение асимптотических линий на поверхности (M_3) имеет вид:

$$\omega^2\left(\tau_1^2\omega^1 + (1 + \tau_2^2 - h)\omega^2\right) = 0. \qquad (15)$$

Так как $\tau_1^2 = 0$, то асимптотические линии на поверхности (M_3)-сдвоенные. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Поверхность (M_2), ассоциированная с конгруэнцией $H_{0,2}$, вырождается в линию с касательной параллельной плоскости α_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$dM_2 = \omega^1(1 + s_1^1)\bar{e}_1 + \omega^2(s_2^1\bar{e}_1 + h\bar{e}_3). \qquad (16)$$

Учитывая (I0), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 4. Конгруэнции $H_{0,1}$ обладают следующими свойствами: I/поверхность (M_2) является торсом с с прямолинейными образующими, коллинеарными ℓ_1; 2/прямолинейная конгруэнция (ℓ_2)-цилиндрическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I/Используя (16), находим уравнение асимптотических линий поверхности (M_3)

$$\omega^2\left((s_2^2(1 + s_1^1) + h\tau_1^2)\omega^1 + (s_2^1 s_2^2 + h(\tau_2^2 - h))\omega^2\right) = 0. \qquad (17)$$

В силу (9), (17) приводится к виду:

$$h(\tau_2^2 - h)(\omega^2)^2 = 0. \qquad (18)$$

2/Имеем

$$d\bar{e}_2\Big|_{\omega^2=0} = \omega_2^1\bar{e}_1 + \omega_2^2\bar{e}_2 + \omega_2^3\bar{e}_3\Big|_{\omega^2=0} = s_1^1\omega^1\bar{e}_1 = 0,$$

значит, прямолинейная конгруэнция (ℓ_2)-цилиндрическая.

Теорема доказана.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

2. С о п и н а Е.П. О конгруэнциях центральных квадрик в аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, с. 127-130.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 11 1980

Т.П. Ф у н т и к о в а

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ПРЯМЫХ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные [1] конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$, порожденные прямыми L и L^*, причем многообразие (L) -двумерное, а многообразие (L^*) -одномерное. Соответствие между элементами многообразий таково, что полным прообразом прямой L^* является линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$, прямолинейной конгруэнции (L). Получены некоторые свойства конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$, а также рассмотрены расслояемые конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$.

Исследование ведется в каноническом репере $R=\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина A которого совмещается с той точкой луча L, в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_{L^*}$ параллельна соответствующему лучу L^*, конец вектора $\vec{e}_1$ помещается в точку луча L^*, в которой касательная плоскость к поверхности (L^*) параллельна соответствующему лучу L, вектор $\vec{e}_3$ направлен по прямой L и пронормирован соответствующим образом. Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$ в репере R имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\omega^1+\omega_1^1=0, \quad \omega^1=b\,\omega_2^1, \quad \omega_2^3=c\,\omega^1, \quad \omega_3^2=m\,\omega_2^1+\omega_3^1, \\ \omega^3+\omega_1^3=v\,\omega_2^1, \quad \omega^2=\ell\,\omega_2^1+k\,\omega_3^1, \quad \omega^3=q\,\omega_2^1+p\,\omega_3^1, \\ \omega_2^2=s\,\omega_2^1+n\,\omega_3^1, \quad \omega_1^2=h\,\omega_2^1+(v-k)\,\omega_3^1.\end{gathered} \tag{1}$$

Такие конгруэнции определяются с произволом трех функций двух аргументов.