УДК 530.145.82

А. И. Иванов, А. А. Шпилевой

О КВАНТОВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В МОДЕЛЯХ ИЗИНГА И СВЕТОДЕЛИТЕЛЯ

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
Рецензия от 18.11.2021 г.

Показано, что квантовое преобразование Фурье сохраняет коммутационные соотношения между билинейными функциями операторов рождения и уничтожения. На основе определения квантового преобразования Фурье, введенного в рамках модели Изинга, рассмотрены два его частных случая. Показано, что один частный случай квантового преобразования Фурье реализуется в модели симметричного светоделителя.

It is shown that the quantum Fourier transform preserves the commutation relations between the bilinear functions of the creation and annihilation operators. Based on the definition of the quantum Fourier transform introduced in the framework of the Ising model, two of its special cases are considered. It is shown that one particular case of the quantum Fourier transform is realized in the model of a symmetric beam splitter.

Ключевые слова: квантовое преобразование Фурье, модель Изинга, преобразование Швингера — Вигнера, светоделитель

Keywords: quantum Fourier transform, Ising model, Schwinger — Wigner transform, beam splitter

Введение

Пусть имеется система из n кубитов, состояния которой представляют собой векторы в гильбертовом пространстве размерности $N=2^n$. Обозначим базисные состояния квантовой системы через $|j>$, где $j=0, 1, ..., N-1$. Тогда *квантовое преобразование Фурье* определяется следующим унитарным преобразованием этих состояний:

$$\left|j\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right)|\mathrm{k}> .$$

Преобразование Фурье базисных функций определяет соответствующее преобразование любого вектора состояния этой системы:

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{c_j}\left|\mathrm{j}\right> \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j,k=0}^{N-1} exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right)\mathrm{c_j}\left|\mathrm{k}\right> = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{N}-1} \tilde{\mathrm{c}}_\mathrm{k}\left|\mathrm{k}\right> .$$

Здесь

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right)c_j .$$

© Иванов А. И., Шпилевой А. А., 2021
*Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2021. № 4. С. 76 – 83.*

Последняя формула представляет собой преобразование Фурье комплексных амплитуд вероятности. Заметим, что она в точности соответствует так называемому классическому дискретному преобразованию Фурье, примененному к столбцу комплексных чисел c_j, где $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

В области квантовых информационных процессов хорошо известны квантовые цепи, реализующие *квантовое преобразование Фурье* [1]. Оно применяется и в квантовой теории магнетизма, причем это применение имеет свою специфику. Например, оно используется в хорошо изученной модели Изинга. На основе определения квантового преобразования Фурье, введенного в рамках этой модели, мы рассматриваем два его частных случая. В самом простейшем случае квантовое преобразование Фурье может быть ассоциировано с вращением в пространстве спиновых состояний. Самое замечательное состоит в том, что эти частные случаи *квантового преобразования Фурье* реализуются в модели светоделителя.

Модель Изинга и квантовое преобразование Фурье

Квантовая модель Изинга является идеальным объектом для тестирования многих методов. Как известно, гамильтониан одномерной цепочки Изинга [2], помещенной в поперечное магнитное поле, может быть записан в следующем виде:

$$\hat{H} = -\sum_{j=1}^{N} J_j \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x - \sum_{j=1}^{N} h_j \hat{\sigma}_j^z ,$$

где индекс $j = 1, \ldots, N$ нумерует спины в одномерной цепочке Изинга длиной N; $\hat{\sigma}_j^\alpha$ — матрицы Паули ($\alpha = x, y, z$), соответствующие спину с номером j; J_j — локальные константы спин-спиновой связи; h_j — локальное поперечное магнитное поле. Использование периодических граничных условий предполагает выполнение равенства $\hat{\sigma}_{N+1}^\alpha \equiv \hat{\sigma}_1^\alpha$. Напомним, что матрицы Паули, относящиеся к различным спинам в цепочке, коммутируют:

$$\left[\hat{\sigma}_j^\alpha , \hat{\sigma}_{j'}^{\alpha'} \right] = 0 \text{ для } j \neq j.$$

Матрицы Паули, относящиеся к одной позиции в цепочке, удовлетворяют известному коммутационному соотношению с последующей циклической перестановкой верхнего индекса:

$$\left[\hat{\sigma}_j^x , \hat{\sigma}_j^y \right] = 2i\, \hat{\sigma}_j^z .$$

Как известно, фермионизация одномерных спиновых моделей может быть осуществлена с помощью преобразования Йордана — Вигнера [3]:

$$\hat{\sigma}_j^x = \hat{\Upsilon}_j (\hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger),\ \hat{\sigma}_j^y = -i\hat{\Upsilon}_j (\hat{c}_j - \hat{c}_j^\dagger),\ \hat{\sigma}_j^z = 1 - 2\hat{n}_j,\ \hat{\Upsilon}_j = \prod_{j'=1}^{j-1} \left(1 - 2\hat{n}_{j'}\right),\ \hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j .$$

Здесь $\hat{c}_j$ и $\hat{c}_j^\dagger$ — стандартные бесспиновые фермионные операторы с антикоммутационными соотношениями вида

$$\left\{\hat{c}_j, \hat{c}_{j'}^\dagger\right\} = \delta_{j,j'}, \ \left\{\hat{c}_j, \hat{c}_{j'}\right\} = \left\{\hat{c}_j^\dagger, \hat{c}_{j'}^\dagger\right\} = 0.$$

Представление Йордана — Вигнера позволяет преобразовать спиновые операторы в локальные фермионные операторы:

$$\hat{\sigma}_j^z = 1 - 2\hat{n}_j = (\hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger)(\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j), \ \hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1}^\dagger + \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}\hat{c}_j + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j.$$

Тогда фермионный гамильтониан одномерной цепочки Изинга, помещенной в поперечное магнитное поле, с учетом периодического граничного условия $\hat{c}_{N+1} = \hat{c}_1$ примет следующий вид:

$$\hat{H} = -\sum_{j=1}^{N} J_j \left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1}^\dagger + \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}\hat{c}_j + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j\right) - \sum_{j=1}^{N} h_j \left(1 - 2\hat{n}_j\right).$$

Для однородной цепочки в однородном поле $J_j = J$, $h_j = h$, поэтому гамильтониан упрощается:

$$\hat{H} = -J\sum_{j=1}^{N} \left(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1}^\dagger + \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \hat{c}_{j+1}\hat{c}_j + \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j\right) - h\sum_{j=1}^{N} \left(1 - 2\hat{n}_j\right).$$

С самого начала по умолчанию полагалось, что спин с номером j локализован в точке с координатой x_j и, соответственно, оператор $\hat{c}_j^\dagger$ порождает спиновое возбуждение в точке с координатой x_j. Переход от координатного представления к импульсному (k-представлению) выполняется по формуле

$$\hat{c}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{b}_k e^{ikx_j},$$

где $\hat{b}_k$ — оператор уничтожения спинового возбуждения с импульсом k. Для одномерной цепочки с периодом a можно положить $x_j = ja$, где a — период. Если положить $a = 1$, то переход от фермионных операторов $\hat{c}_j$ и $\hat{c}_j^\dagger$ в координатном представлении к фермионным операторам $\hat{b}_j$ и $\hat{b}_j^\dagger$ в k-пространстве определится следующим образом:

$$\hat{c}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{b}_k e^{ikj}, \tag{1}$$

$$\hat{b}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \hat{c}_j e^{-ikj}.$$

Это преобразование также называют *квантовым преобразованием Фурье.* При четном N из периодического граничного условия $\hat{c}_{N+1} = \hat{c}_1$ следует $e^{ikN} = 1$, которое выполняется при

$$k = \frac{2\pi n}{N}, \, n = -\frac{N}{2} + 1, \ldots, 0, \ldots, \frac{N}{2}. \tag{2}$$

Хорошо известно, что преобразование (1) сохраняет антикоммутационные (в случае бозонов — коммутационные) соотношения для операторов $\hat{c}_j$ и $\hat{c}_j^\dagger$. Здесь мы покажем, что, более того, оно сохраняет и коммутационные соотношения между *билинейными* функциями операторов рождения и уничтожения. Эти *билинейные* функции ассоциируются с операторами проекций спина и легко находятся на основе преобразования Швингера — Вигнера [4]:

$$\hat{S}_\alpha = \frac{1}{2} \hat{c}_k^\dagger \hat{\sigma}_{kk'}^\alpha \hat{c}_{k'}. \tag{3}$$

Здесь полагают, что k, $k' = 1, 2$, $\hat{c}_k^\dagger$ и $\hat{c}_{k'}$ — пара фермионных или бозонных операторов, $\hat{\sigma}^\alpha$ — матрица Паули ($\alpha = x, y, z$). Представление Швингера — Вигнера (3) позволяет *билинейной* функции операторов любой пары фермионных (бозонных) мод поставить в соответствие оператор проекции спина:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^{(c)} &= \frac{1}{2} \left(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1 \right), \\ \hat{S}_y^{(c)} &= \frac{i}{2} \left(\hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1 - \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2 \right), \\ \hat{S}_z^{(c)} &= \frac{1}{2} \left(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 - \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 \right). \end{aligned} \tag{4}$$

На основе (4) покажем, что при $N=2$ квантовое преобразование Фурье вида (1) можно интерпретировать как поворот в гильбертовом пространстве состояний спиновой системы, ассоциированой с рассматриваемыми фермионными модами $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$. Действительно, если $N=2$, то индекс $j=1, 2$, а индекс k согласно (2) принимает значения 0 и π. В этом случае квантовое преобразование Фурье (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \hat{b}_\pi, \\ \hat{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i2\pi} \hat{b}_\pi. \end{aligned} \tag{5}$$

Предваряя использование представления Швингера — Вигнера, введем для операторов $\hat{b}_0$ и $\hat{b}_\pi$ новые обозначения: $\hat{b}_0 \equiv \hat{b}_1, \hat{b}_\pi \equiv \hat{b}_2$ и запишем соотношения (5) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Из этих соотношений с учетом преобразования (4) немедленно вытекает, что операторы проекций спина, ассоциированного с фермионными модами $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$, при квантовом преобразовании Фурье трансформируются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\hat{S}_x^{(c)} \to \hat{S}_z^{'(b)}, \\ &\hat{S}_y^{(c)} \to \hat{S}_y^{'(b)}, \\ &\hat{S}_z^{(c)} \to -\hat{S}_x^{'(b)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{S}_x^{'(b)} = \frac{1}{2}\,(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1),\ \hat{S}_y^{'(b)} = \frac{i}{2}\,(\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2),\ \hat{S}_z^{'(b)} = \frac{1}{2}\,(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2).$$

Из преобразования (7) видно, что оно сохраняет коммутационные соотношения между *билинейными* функциями операторов рождения и уничтожения. Кроме того, преобразование (7) соответствует повороту системы координат, который характеризуется углами Эйлера $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \pi/2$.

Если $N=4$, то индекс $j=1, 2, 3, 4$, а индекс k согласно (2) принимает значения $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π. Использование представления Швингера — Вигнера предполагает выделение пар фермионных мод. Для удобства такого выделения введем дополнительные схожие обозначения для операторов каждой пары мод: $\hat{b}_{-\pi/2} \equiv \hat{a}_1$, $\hat{b}_{\pi/2} \equiv \hat{a}_2$, $\hat{c}_3 \equiv \hat{d}_1$, $\hat{c}_4 \equiv \hat{d}_2$. В этом случае квантовое преобразование Фурье (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{4}}\left(-i\hat{a}_1 + \hat{b}_1 + i\hat{a}_2 - \hat{b}_2\right), \\ \hat{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{4}}\left(-\hat{a}_1 + \hat{b}_1 - \hat{a}_2 + \hat{b}_2\right), \\ \hat{d}_1 &= \frac{1}{\sqrt{4}}\left(i\hat{a}_1 + \hat{b}_1 - i\hat{a}_2 - \hat{b}_2\right), \\ \hat{d}_2 &= \frac{1}{\sqrt{4}}\left(\hat{a}_1 + \hat{b}_1 + \hat{a}_2 + \hat{b}_2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Из этих соотношений с учетом представления Швингера — Вигнера (4) следует, что при квантовом преобразовании Фурье операторы проекций спина, ассоциированного с фермионными модами $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ и $\hat{d}_1$, $\hat{d}_2$, трансформируются следующим образом:

$$\hat{S}_x^{(c)} + \hat{S}_x^{(d)} \to \hat{S}_y^{'(a)} + \hat{S}_z^{'(b)},$$

$$\hat{S}_y^{(c)} + \hat{S}_y^{(d)} \to -\hat{S}_z^{'(a)} + \hat{S}_y^{'(b)}, \qquad (9)$$

$$\hat{S}_z^{(c)} + \hat{S}_z^{(d)} \to -\hat{S}_x^{'(a)} - \hat{S}_x^{'(b)}.$$

Здесь

$$\hat{S}_x^{(d)} = \frac{1}{2}\left(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_2 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_1\right),\ \hat{S}_y^{(d)} = \frac{i}{2}\left(\hat{d}_2^\dagger \hat{d}_1 - \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_2\right),\ \hat{S}_z^{(d)} = \frac{1}{2}\left(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 - \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2\right),$$

$$\hat{S}_x^{'(a)} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right),\ \hat{S}_y^{'(a)} = \frac{i}{2}\left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2\right),\ \hat{S}_z^{'(a)} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2\right).$$

Из преобразования (9) видно, что и оно сохраняет коммутационные соотношения между *билинейными* функциями операторов рождения и уничтожения.

Далее рассмотрим физическую модель, реализующую частный случай квантового преобразования Фурье.

Модель светоделителя и квантовое преобразование Фурье

Светоделитель (beam splitter) — это оптическое устройство, позволяющее разделять падающий луч света (например, лазерный луч) на два или более лучей. Математическая модель светоделителя рассматривает его как четырехпортовое устройство, то есть черный ящик с двумя входными и двумя выходными портами (рис.).

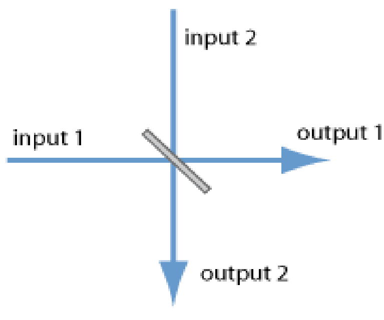

Рис. Модель светоделителя

Классические поля на входе и выходе светоделителя могут быть записаны следующим образом:

$$E_{in}(\vec{r},t) = \frac{1}{2} e^{-i\omega t}\left[c_1 e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} + c_2 e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}\right],\quad E_{out}(\vec{r},t) = \frac{1}{2} e^{-i\omega t}[b_1 e^{i\vec{k}'_1 \vec{r}} + b_2 e^{i\vec{k}'_2 \vec{r}},$$

где c_i и b_i — амплитуды полей. В модели пассивного светоделителя при квантовом описании поля бозонные операторы $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ и $\hat{b}_1, \hat{b}_2$ уничтожения фотонов во входных и выходных портах линейно связаны [5]:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Требования унитарности матрицы преобразования и сохранения бозонных коммутационных соотношений для операторов выходных портов приводят к условиям

$$|B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 = 1,\ |B_{21}|^2 + |B_{22}|^2 = 1,\ B_{11}\,B_{21}^{*} + B_{12}\,B_{22}^{*} = 0.$$

В работе [5] найдено, что эти условия выполняются с матрицей вида

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Для симметричного (50 : 50) светоделителя $\theta = \pi/4$, поэтому связь (10) операторов уничтожения фотонов в его входных и выходных портах принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}.$$

Это выражение в точности совпадает с выражением (6). Заметим, что правомерность такого сравнения не вызывает сомнения, ибо квантовое преобразование Фурье (1) сохраняет и бозонные коммутационные соотношения. Таким образом, симметричный (50 : 50) светоделитель можно рассматривать как устройство, реализующее частный случай квантового преобразования Фурье.

Список литературы

1. *Verstraete F., Cirac J.I., Latorre J.I.* Quantum circuits for strongly correlated quantum systems. arXiv:0804.1888.

2. *Pfeuty P.* The one-dimensional Ising model with a transverse field // Annals of Physics. 1970. №57 (1). P. 79—90.

3. *Jordan P., Wigner E.* Über das Paulische Äquivalenzverbot // Z. Phys. 1928. №47. S. 631—651.

4. *Schwinger J.* On angular momentum : Unpublished report. Harvard University, Nuclear Development Associates, Inc., United States Department of Energy. Report №NYO-3071 (January 26, 1952).

5. *Campos R.A., Saleh B.E.A., Teich M.C.* Quantum-mechanical lossless beam splitter: SU(2) symmetry and photon statistics // Phys. Rev. A. 1989. №40 (3). P. 1371—1384.

Об авторах

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

Андрей Алексеевич Шпилевой — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AShpilevoi@kantiana.ru

The authors

Prof. Aleksei I. Ivanov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AIvanov@kantiana.ru

Dr Andrey A. Shpilevoy, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AShpilevoi@kantiana.ru