О.М. Веселова

ПСЕВДОФОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГОЛОНОМНЫХ СЕТЕЙ В E_3

Сетью в некоторой области трехмерного евклидова пространства называется система $\Sigma_3 = \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ трех семейств гладких линий, таких, что через каждую точку этой области проходит по одной линии каждого семейства по линейно независимым направлениям. Присоединим к данной сети подвижной репер $(X, \bar e_i)$, где орты $\bar e_i$ расположены на касательной в точке X к линиям сети. Сеть называется голономной, если каждое из двумерных распределений $(X, \bar e_i, \bar e_j)(i \neq j)$, определяемых этой сетью, интегрируемо.

Псевдофокусом касательной к линии ω^k сети называют такую точку $\bar F^i_k = \bar x + \lambda \bar e_k$, дифференциал которой не содержит компонента по вектору $\bar e_i$, когда точка X смещается вдоль линии ω^i.

Новую сеть (F^i_k), описанную точкой F^i_k, будем называть псевдофокальным преобразованием данной сети. Инфинитезимальные перемещения подвижного репера $(x, \bar e_i)$, присоединенного к данной сети, определяются уравнениями

$$d\bar x = \omega^i \bar e_i, \quad d\bar e_i = \omega_i^j \bar e_j \quad (i,j,k = 1,2,3),$$

где ω^i и ω_i^j удовлетворяют соотношениям, определяющим сеть

$$\omega_i^j = a^j_{ik}\,\omega^k \quad (i \neq j), \tag{1}$$

и уравнениями структуры евклидова пространства:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Требование голономности рассматриваемой сети выражается условием

$$a^j_{ik} = a^j_{ki}, \quad i,j,k \text{ -различны.}$$

1. Голономные сети, не имеющие псевдофокусов

На каждой касательной к линии сети в общем случае, когда $a^j_{ij} \neq 0$, $i \neq j$, имеются два псевдофокуса:

$$\bar F_i^j = \bar x - \frac{1}{a^j_{ij}}\bar e_i, \quad i \neq j.$$

Выделяется случай, когда псевдофокусов не существует: $a^j_{ij} = 0$. В уравнениях системы (1) считаем $a^j_{ij} = 0$ и дифференцируем эти уравнения внешним образом. Получаем систему внешних квадратичных дифференциальных уравнений, замыкающих систему (1),

$$\Delta a^k_{ij} \wedge \omega^j = 0$$

и три соотношения

$$a^k_{ij}\, a^j_{kk} = a^j_{ii}\, a^i_{jk}, \quad i,j,k \text{ -различны.}$$

Дифференцируем эти соотношения и выражаем формы Δa^2_{11}, Δa^3_{11}, Δa^1_{33} через оставшиеся формы. Получаем систему из внешних дифференциальных уравнений с шестью неизвестными формами $\Delta a^3_{12}, \Delta a^1_{23}, \Delta a^2_{13}, \tilde\Delta a^2_{33}, \tilde\Delta^2_{22}, \tilde\Delta a^1_{22}$:

$$a^2_{13}\tilde{\Delta} a^2_{33}\wedge\omega + a^2_{33}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^1 - a^2_{11}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^1 + a^1_{23}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^3=0,$$

$$\Delta a^2_{13}\wedge\omega^1+\tilde{\Delta} a^2_{33}\wedge\omega^3=0,$$

$$a^3_{22}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^1 + a^2_{13}\tilde{\Delta} a^3_{22}\wedge\omega^1 - a^3_{11}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^1 + a^1_{23}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^2=0,$$

$$a^3_{12}\Delta a^1_{23}\wedge\omega^2 + a^1_{22}\Delta a^2_{13}\wedge\omega^3 + a^2_{13}\tilde{\Delta} a^1_{22}\wedge\omega^3 - a^1_{33}\Delta a^3_{12}\wedge\omega^3=0,$$

$$\Delta a^3_{12}\wedge\omega^1+\tilde{\Delta} a^3_{22}\wedge\omega^2=0,\quad \tilde{\Delta} a^1_{22}\wedge\omega^2+\Delta a^1_{23}\wedge\omega^3=0.$$

Для полученной системы находим характеры: $s_1=6$, $S_2=0$. Значит,число Картана $Q=6$. Разрешение этой системы по лемме Картана вводит шесть независимых параметров. Следовательно, $Q=N$ -система в инволюции. Доказана теорема.

Т е о р е м а. Голономная сеть евклидова пространства E_3, не имеющая псевдофокусов на каждой касательной к линиям сети, существует с произволом 6 функций одного аргумента.

Легко проверить, что рассматриваемая сеть является чебышевской сетью II рода. Она не является 3-сопряженной системой, поэтому она не чебышевская сеть I рода, но на поверхности $\omega^3=0$ сеть линий $\{\omega^1,\omega^2\}$ является чебышевской относительно связности, индуцированной псевдонормалью к этой поверхности. Действительно, при перемещении точки X по линии ω^2 на этой поверхности имеем:

$$d\bar{e}_1=\omega_1^1\bar{e}_1+\omega_1^2\bar{e}_2+\omega_1^3\bar{e}_3;\quad \omega_1^2=0,\ \text{т.к.}\ \omega^1=\omega^3=0;$$

$$\mathrm{np}_{T_2(x)}(d\bar{e}_1)=\omega_1^1\bar{e}_1 \qquad \text{(проектирование параллельно } \bar{e}_3)$$

Следовательно, на поверхности $V_2\,(\omega^3=0)$ направление вектора $\bar{e}_1$ переносится параллельно вдоль линии ω^2 в связности, индуцированной псевдонормалью $(X,\bar{e}_3)$ к этой поверхности. Аналогичное заключение верно и для направления вектора $\bar{e}_2$. Значит, на поверхности $\omega^3=0$ сеть линий $\{\omega^1,\omega^2\}$ -чебышевская в индуцированной связности.

Справедливо и обратное. Если для голономной сети потребовать, чтобы на поверхности $\omega^3=0$ сеть $\{\omega^1,\omega^2\}$ была чебышевской в связности, индуцированной псевдонормалью $(X,\bar{e}_3)$, точно так же с сетями $\{\omega^2,\omega^3\}$ на поверхности $\omega^1=0$ и $\{\omega^1,\omega^3\}$ на поверхности $\omega^2=0$, то такая сеть теряет все псевдофокусы на каждой касательной к линиям сети. Следовательно, полученное свойство является характеристическим для рассматриваемой сети.

Условием геодезичности линии ω^1 на поверхности $\omega^3=0$ относительно псевдонормали $(X,\bar{e}_3)$ является $a^2_{11}=0$. Тогда $\omega_1^2\equiv 0$. Продифференцируем это тождество внешним образом и получим $a^3_{12}\,a^2_{13}=0$. Если $a^3_{12}=0$, то $\bar{e}_1=\mathrm{Const}$ при движении по линии ω^2. Значит, линия ω^2 -цилиндрическая. При этом линия ω^1 -не прямая. Если $a^2_{13}=0$, то $\bar{e}_3=\mathrm{Const}$ при движении по линии ω^1. Значит, линия ω^1 -линия кривизны относительно псевдонормали $(X,\bar{e}_3)$. Если $a^3_{12}=a^2_{13}=0$, то линия ω^2 -цилиндрическая, линия ω^1 -цилиндрическая линия кривизны.

Условие геодезичности линий ω^1 и ω^2 на поверхности $\omega^3=0$ имеет вид: $a^2_{11}=a^1_{22}=0$. Тогда $\omega_1^2\equiv 0,\ \omega_2^1\equiv 0$ и отсюда имеем $a^3_{12}\,a^2_{13}=a^3_{12}\,a^1_{23}=0$.

Если $a^3_{12}=0$, то $\bar e_1 = const$ вдоль линии ω^2, $\bar e_2 = const$ вдоль линии ω^1. Следовательно, линии ω^1 и ω^2 -цилиндрические.

Если $a^2_{13}=a^1_{23}=0$, $a^3_{12}\neq 0$, то $\bar e_3 = const$ при любом перемещении по поверхности $\omega^3=0$. Значит, в точках поверхности $\omega^3=0$ касательные к линиям ω^3 параллельны. Поверхность $\omega^3=0$ не является плоскостью.

Если сеть ортогональная, то из $\gamma_{12}=0$ следует:

$\gamma_{ik}\omega^k_j+\gamma_{jk}\omega^k_i=0$, где $\gamma_{ij}=\bar e_i\cdot\bar e_j$

Откуда $a^1_{22}\omega^2+a^2_{11}\omega^1=0 \Rightarrow a^2_{11}=a^1_{22}=0$.

Значит, линии ω^1 и ω^2 -геодезические на поверхности относительно нормали $(x,\bar e_3)$. Аналогично, $\{\omega^1,\omega^3\}$-геодезическая сеть на поверхности $\omega^1=0$ относительно нормали $(x,\bar e_2)$ и $\{\omega^2,\omega^3\}$-геодезическая сеть на поверхности относительно нормали $(x,\bar e_1)$.

Можно доказать, что трижды сопряженные системы, не имеющие псевдофокусов, существуют с произволом шести функций одного аргумента.

При этом вектор $\bar e_1$ переносится параллельно по любому направлению поверхности $\omega^1=0$, аналогично и векторы $\bar e_2, \bar e_3$. Значит, такая сеть является частным случаем чебышевской сети, причем линии ω^i не прямые.

Т е о р е м а. Голономная сеть в E_3, не имеющая псевдофокусов на каждой касательной к линиям сети, при условии $\gamma_{12}=const$ $(i\neq j)$ вырождается в координатную сеть аффинной системы координат в пространстве.

Имеем: $d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\omega^k_j+\gamma_{jk}\omega^k_i$, $\gamma_{ij}=const$, $i\neq j$.

Дифференцирование γ_{12} приводит к системе

$$a^2_{11}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^3_{12}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^3_{11}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})=0, \quad (1)$$

$$a^1_{22}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^3_{22}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^3_{12}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})=0, \quad (2)$$

$$a^2_{13}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]+a^1_{23}\left[1-(\gamma_{12})^2\right]=0. \quad (3)$$

Из (3) $\Rightarrow$ $a^2_{13}+a^1_{23}=0$. (4)

Дифференцируя γ_{13} и γ_{23}, получим еще системы:

$$a^3_{11}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^2_{11}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})+a^2_{13}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (5)$$

$$a^1_{33}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^2_{13}(\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13})+a^2_{33}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (6)$$

$$a^1_{23}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]+a^3_{12}\left[1-(\gamma_{13})^2\right]=0, \quad (7)$$

$$a^3_{22}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^1_{22}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^1_{23}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (8)$$

$$a^2_{33}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^1_{23}(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})+a^1_{33}(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})=0, \quad (9)$$

$$a^2_{13}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]+a^3_{12}\left[1-(\gamma_{23})^2\right]=0. \quad (10)$$

Из (7) и (10) $\Rightarrow$ $a^1_{23}+a^3_{12}=0$ (11)

и

$$a^2_{13}+a^3_{12}=0.$$

Сравнивая (4),(11),(12), имеем $a^3_{12}=a^2_{13}=a^1_{23}=0$.

Рассмотрим систему уравнений (1) и (5). Вычисления показывают, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1-(\gamma_{12})^2 & \gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13} \\ \gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13} & 1-(\gamma_{12})^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно $a^2_{11} = a^3_{11} = 0$. Аналогично, рассматривая систе-
му уравнений (2) и (8), получаем $a^1_{22} = a^3_{22} = 0$ и из (6) и (9) $\Rightarrow$
$a^1_{33} = a^2_{33} = 0$. Имеем $\omega^j_i = 0$ $(i \neq j) \Rightarrow \omega^i_i = 0$

$$d\bar{e}_i = \omega^k_i \bar{e}_k = 0 \Rightarrow \bar{e}_k = Const.$$

Все линии сети-прямые, параллельные в каждом семействе.
Следовательно, это просто координатная сеть аффинной систе-
мы координат в пространстве.

2. Голономные сети с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети

Потребуем, чтобы на каждой касательной к линиям сети отсутствовало по одному псевдофокусу. Например, F^3_1, F^2_3, F^1_2.
Это значит, что $a^3_{13} = a^2_{32} = a^1_{21} = 0$. (1)

Уравнения $\omega^j_i = a^j_{ik}\omega^k$ и соотношения (1) составляют уравнения задачи. Внешнее дифференцирование такой системы дает шесть внешних дифференциальных уравнений, связывающих 12 неизвестных форм. $S_1 = S_2 = 6$ -характеры системы. Число Картана $Q = 6 + 2\cdot 6 = 18$. Разрешение уравнений системы по лемме Картана вводит 18 независимых параметров. Получаем $Q = N$, система-в инволюции. Таким образом, голономные сети с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети в E_3 существуют с произволом шести функций двух аргументов.

Введем обозначения :

P^i_j-точки пересечения касательных к линиям ω^i в точке F^k_j с плоскостью $x^j = 0$ (i, j, k -различны), L^i_j-точки пересечения касательных к линиям ω^i в точках F^i_k с осью $(0x^j)$ (i, j, k-различны).

Тогда

$$L^2_3 = F^1_3 \Longleftrightarrow \alpha = a^3_{12}a^1_{31},$$
$$L^3_1 = F^2_1 \Longleftrightarrow \rho = a^1_{23}a^2_{12},$$
$$L^1_2 = F^3_2 \Longleftrightarrow z = a^2_{13}a^3_{23},$$

где α, ρ, z -коэффициенты разложения форм Δa^j_{ij} по лемме Картана.

С л е д с т в и е. Для трижды сопряженной системы с одним псевдофокусом на каждой касательной к линиям сети

$$L^2_3 = F^1_3,\ L^3_1 = F^2_1,\ L^1_2 = F^3_2 \Longleftrightarrow \alpha = \rho = z = 0,$$

$$(x, P^1_1) \perp (x, P^3_1) \Leftrightarrow a^2_{11}(a^2_{12}\gamma_{23} - a^2_{13}) = a^3_{11}(a^2_{13}\gamma_{23} - a^2_{12}), \quad (1)$$
$$(x, P^2_2) \perp (x, P^1_2) \Leftrightarrow a^3_{22}(a^3_{23}\gamma_{13} - a^3_{12}) = a^1_{22}(a^3_{12}\gamma_{13} - a^3_{23}), \quad (2)$$
$$(x, P^3_3) \perp (x, P^2_3) \Leftrightarrow a^1_{33}(a^1_{31}\gamma_{12} - a^1_{23}) = a^2_{33}(a^1_{23}\gamma_{12} - a^1_{31}), \quad (3)$$
$$((x, P^1_1), (x, P^3_1), (x, \bar{e}_2), (x, \bar{e}_3)) = -1 \Leftrightarrow a^2_{11}a^2_{12} = a^3_{11}a^2_{13}, \quad (4)$$
$$((x, P^2_2), (x, P^1_2), (x, \bar{e}_1), (x, \bar{e}_3)) = -1 \Leftrightarrow a^3_{22}a^3_{23} = a^1_{22}a^3_{12}, \quad (5)$$
$$((x, P^3_3), (x, P^2_3), (x, \bar{e}_1), (x, \bar{e}_2)) = -1 \Leftrightarrow a^1_{33}a^1_{31} = a^2_{33}a^1_{23}. \quad (6)$$

$$(1), (4) \Rightarrow \frac{a^2_{13}}{a^2_{12}} = \frac{a^2_{13}\gamma_{23} - a^2_{12}}{a^2_{12}\gamma_{23} - a^2_{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2_{13}a^2_{12}\gamma_{23} - (a^2_{13})^2 = a^2_{12}a^2_{13}\gamma_{23} - (a^2_{12})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2_{13})^2 = (a^2_{12})^2 \Rightarrow a^2_{13} = \pm a^2_{12} \Rightarrow a^2_{11} = \pm a^3_{11}.$$

2. Зак. 10461.

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Каждая пара условий $\begin{cases} a^2_{13}=a^2_{12} \\ a^2_{11}=a^3_{11} \end{cases}$ и $\begin{cases} a^2_{13}=-a^2_{12} \\ a^2_{11}=-a^3_{11} \end{cases}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямые (X, P^1_1) и (X, P^3_1) являлись биссектрисами координатных углов, образованных прямыми $(X, \bar{e}_2)$ и $(X, \bar{e}_3)$.

Аналогичные условия можно сформулировать для прямых (X, P^2_2), (X, P^1_2) и (X, P^3_3), (X, P^2_3).

З а м е ч а н и е. Для сети, имеющей оба псевдофокуса на каждой касательной к линиям сети, имеем

$$(X, P^1_1) \perp (X, P^3_1) \Longleftrightarrow \frac{a^2_{11}}{a^3_{11}} = \frac{a^2_{13}\gamma_{23} - (a^2_{12} - a^3_{13})}{(a^2_{12} - a^3_{13})\gamma^3_{13} - a^2_{13}},$$

$$\big((X, P^1_1), (X, P^3_1), (X, \bar{e}_2), (X, \bar{e}_3)\big) = -1 \Longleftrightarrow a^3_{11} a^2_{13} = a^2_{11}(a^2_{12} - a^3_{13}).$$

Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы (X, P^1_1) и (X, P^3_1) были биссектрисами координатных углов $(X, \bar{e}_2)$ и $(X, \bar{e}_3)$ будет каждое из двух условий

$$\begin{cases} a^2_{13} = a^2_{12} - a^3_{13}, \\ a^2_{11} = a^3_{11} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a^2_{13} = a^3_{13} - a^2_{12}, \\ a^2_{11} = -a^3_{11}. \end{cases}$$

Рассмотрим условия

$$P^3_1 \in (F^1_3, F^3_2) \Longleftrightarrow a^1_{23} a^2_{11} = a^3_{12} a^2_{33}, \qquad (\text{I})$$

$$P^1_2 \in (F^2_1, F^1_3) \Longleftrightarrow a^2_{13} a^3_{22} = a^1_{23} a^3_{11}, \qquad (\text{II})$$

$$P^2_3 \in (F^3_2, F^2_1) \Longleftrightarrow a^2_{13} a^1_{22} = a^3_{12} a^1_{33}. \qquad (\text{III})$$

Если к этим условиям присоединить условия предыдущей теоремы, то получаем

$$a^1_{23} a^2_{11} = a^3_{12} a^2_{33} = a^2_{13} a^3_{22}.$$

т.е. из ($\underline{\text{I}}$) и ($\underline{\text{II}}$) следует ($\underline{\text{III}}$).

Оказывается справедливой следующая теорема.

Т е о р е м а. Необходимым и достаточным условием того, чтобы пересекались нормали к поверхностям $\omega^3 = 0$ в точках X и F^2_1, $\omega^1 = 0$ в точках X и F^3_2, $\omega^2 = 0$ в точках X и F^1_3, является выполнение равенств

$$a^3_{12}\left[(a^2_{12})^2 + \beta\right] + \alpha a^3_{11} + \gamma_{12} a^2_{11} a^2_{12} a^3_{12} = 0,$$

$$a^1_{23}\left[n + (a^3_{23})^2 + a^3_{12} a^1_{23}\right] - \rho a^1_{22} - \gamma_{23} a^3_{22} a^3_{23} a^1_{23} = 0,$$

$$a^2_{13}(s - a^2_{13} a^1_{23}) + z a^2_{33} - \gamma_{13} a^1_{33} a^1_{31} a^2_{13} = 0,$$

где $\alpha, \beta, \rho, n, z, s$ -коэффициенты разложения форм Δa^2_{12}, Δa^3_{23}, Δa^1_{31} по формам ω^i.

С л е д с т в и е. Если для трижды сопряженной системы выполняется одно из условий $\alpha = \rho = z = 0$ или $a^3_{11} = a^1_{22} = a^2_{33} = 0$, то нормали к указанным в теореме поверхностям пересекаются.

Векторы, лежащие на касательных к линиям $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ в точке F^2_1, обозначим через $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$, в точке F^3_2 -через $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$, в точке F^1_3 -через $\bar{\mathcal{D}}_1, \bar{\mathcal{D}}_2, \bar{\mathcal{D}}_3$.

Условием того, чтобы

$$\bar{e}_1 \perp (F^2_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3), \ \bar{e}_2 \perp (F^3_2, \bar{C}_1, \bar{C}_3), \ \bar{e}_3 \perp (F^1_3, \bar{\mathcal{D}}_1, \bar{\mathcal{D}}_2), \quad (*)$$

является выполнение равенств

$$\mu a^1_{23} a^3_{23} a^2_{12} a^3_{12} - a^2_{12} a^2_{13} \rho + \alpha (a^2_{12})^2 = 0,$$

$$\eta a^1_{23} a^3_{23} a^1_{31} a^2_{13} - a^3_{23} a^3_{12} z + \rho (a^3_{23})^2 = 0,$$

$$\chi a^3_{12} a^2_{12} a^1_{31} a^2_{13} - a^1_{31} a^1_{23} \alpha + z (a^1_{31})^2 = 0,$$

$$\alpha - a_{12}^{2} a_{12}^{3} \gamma_{13} = 0,$$

$$\rho - a_{23}^{3} a_{23}^{1} \gamma_{12} = 0,$$

$$z - a_{31}^{1} a_{13}^{2} \gamma_{23} = 0,$$

где

$$\mu = a_{13}^{2} a_{23}^{3} + a_{23}^{1} a_{11}^{2} - a_{12}^{3} a_{33}^{2} - a_{31}^{1} a_{12}^{2},$$

$$\eta = a_{12}^{3} a_{31}^{1} + a_{13}^{2} a_{22}^{3} - a_{13}^{1} a_{11}^{3} - a_{12}^{2} a_{23}^{3},$$

$$\chi = a_{23}^{1} a_{12}^{2} + a_{12}^{3} a_{33}^{1} - a_{13}^{2} a_{22}^{1} - a_{23}^{3} a_{31}^{1}.$$

С л е д с т в и е 1. Для 3-сопряженной системы соотношения (*) выполняются тогда и только тогда, когда $\alpha = \rho = z = 0$.

С л е д с т в и е 2. Если для 3-сопряженной системы выполняются равенства $\alpha = \rho = z = 0$, то выполняются соотношения (*) и пересекаются нормали к указанным в предыдущей теореме поверхностям.

Рассмотрим случаи специального расположения касательных к линиям $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ в точке F_1^2. Находим

$$\overline{B}_1 = [(a_{12}^{2})^2 + \beta]\overline{e}_1 - a_{11}^{2} \cdot a_{12}^{2} \overline{e}_2 - a_{11}^{3} a_{12}^{2} \overline{e}_3,$$

$$\overline{B}_2 = \alpha \overline{e}_1 - a_{12}^{3} a_{12}^{2} \overline{e}_3,$$

$$\overline{B}_3 = \mu \overline{e}_1 - a_{13}^{2} a_{12}^{2} \overline{e}_2 - (a_{12}^{2})^2 \overline{e}_3.$$

I. Потребуем, чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_3$ были коллинеарны. Тогда $(a_{12}^{2})^2 + \beta = 0$ и $a_{11}^{2} = 0$. Имеем $d\overline{B}_1 = \Omega_1^i \overline{B}_i$, причем

$$\Omega_1^3 = A_{11}^3 \omega^1 + A_{12}^3 \omega^2 + A_{13}^3 \omega^3$$

Можно подсчитать, что

$$A_{13}^3 = \frac{\begin{vmatrix} [(a_{12}^{2})^2+\beta]a_{12}^{2} & \alpha a_{12}^{2} & \xi_3 - [(a_{12}^{2})^2+\beta](a_{12}^{2})^2 \cdot a_{13}^{2}\gamma_{12} - a_{11}^{2}(a_{12}^{2})^3 a_{23}^{1} - a_{11}^{3}(a_{12}^{2})^3 a_{33}^{1} \\ a_{11}^{2} & 0 & \sigma_3 - a_{11}^{2} a_{12}^{2}(\gamma_{12} a_{23}^{1} + \gamma_{23} a_{23}^{3}) + a_{11}^{3} a_{12}^{2} a_{33}^{2} - a_{13}^{2}[(a_{12}^{2})^2+\beta] \\ a_{11}^{3} & a_{12}^{3} & \tau_3 - a_{11}^{3} a_{12}^{2}(\gamma_{13} a_{33}^{1} + \gamma_{23} a_{33}^{2}) + a_{11}^{2} a_{12}^{2} a_{23}^{3} \end{vmatrix}}{(a_{12}^{2})^2 \begin{vmatrix} (a_{12}^{2})^2+\beta & \alpha & \mu \\ a_{11}^{2} & 0 & a_{13}^{2} \\ a_{11}^{3} & a_{12}^{3} & -a_{12}^{2} \end{vmatrix}},$$

где

$$d\beta (a_{12}^{2})^2 - 2 a_{12}^{2} \beta \, d a_{12}^{2} = \xi_1 \omega^1 + \xi_2 \omega^2 + \xi_3 \omega^3,$$

$$a_{12}^{2} d a_{11}^{2} - a_{11}^{2} d a_{12}^{2} = \sigma_1 \omega^1 + \sigma_2 \omega^2 + \sigma_3 \omega^3, \qquad (a)$$

$$a_{12}^{2} d a_{11}^{3} - a_{11}^{3} d a_{12}^{2} = \tau_1 \omega^1 + \tau_2 \omega^2 + \tau_3 \omega^3.$$

Для нашего случая I определитель, стоящий в знаменателе, равен $a_{11}^{3} a_{13}^{2} \alpha$. Поэтому

$$A_{13}^3 = \frac{\sigma_3 + a_{11}^{3} a_{12}^{2} a_{33}^{2}}{a_{12}^{2} a_{13}^{2}}.$$

Если $\sigma_3 + a_{11}^{3} a_{12}^{2} a_{33}^{2} = 0$ (**), то псевдофокуса $\widetilde{F}_1^3$ на касательной $(F_1^2, \overline{B}_1)$ не существует. Используя второе из равенств (a), находим, что равенство (**) принимает вид: $a_{12}^{2} c = 0$. Так как $a_{12}^{2} \neq 0$, то $c = 0$. Здесь c – коэффициент разложения формы Δa_{11}^{2} по формам ω^i:

$$\Delta a_{11}^{2} = q_1 \omega^1 + \beta \omega^2 + c \omega^3.$$

Следовательно, Δa_{11}^{2} зависит только от ω^1 и ω^2. Это приводит к равенству $a_{11}^{3} \cdot a_{33}^{2} = 0$. Так как $a_{11}^{3} \neq 0$ (в противном случае $\overline{B}_1 = 0$), то $a_{33}^{2} = 0$.

Мы приходим к такому выводу:

Если векторные поля $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_3$ коллинеарны и сеть линий $\{\omega^1, \omega^3\}$ -асимптотическая на поверхности $\omega^2=0$,описанной точкой X ,то преобразование $(X)\to(F_1^2)$ будет правильным,т.е. на касательной к линии ω^1 в точке F_1^2 отсутствует псевдофокус $\widetilde{F}_1^3$ (как отсутствует и F_1^3 на касательной к линии ω^1 в точке X).

II.Потребуем,чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_2$ были коллинеарны. Тогда $(a_{12}^2)^2+\beta=0$, $a_{11}^3=0$. При этом линия ω^1 -асимптотическая линия на поверхности $\omega^3=0$,описанной точкой X . Она преобразуется в геодезическую линию поверхности $\omega^3=0$, описанной точкой F_1^2.

III.Потребуем,чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_1$ были коллинеарны.Тогда $a_{11}^2=a_{11}^3=0$. Значит,линия ω^1 -прямая.Очевидно, что она преобразуется в ту же самую прямую.Следовательно, данная сеть и ее преобразование имеют одно общее семейство линий,состоящее из прямых.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Е.В.З а в ь я л о в а

ТРИ-СИСТЕМЫ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется двупараметрическое семейство K фигур F ,образованных т тройкой попарно касающихся невырожденных коник C_1, C_2, C_3, лежащих в различных плоскостях.Такое семейство названо три-системой коник.

Построен каноничнский репер три-системы K ,различные, ассоциированные с ней геометрические образы и рассмотрена три-система K ,все коники которой инцидентны одной квадрике.

§I.Теорема существования

Отнесем три-систему K к каноническому реперу $\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},\mathcal{K}=1,2,3,4)$,поместив вершины A_α в точке пересечения коник C_β, C_γ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$,вершину A_4 -в общую точку плоскостей коник C_α,пронормировав вершины репера так,чтобы уравнения коник C_α имели вид:

$$(x^4)^2-2x^\beta x^\gamma=0,\quad x^\alpha=0 \tag{1.1}$$