connection’s bunches, induced by clothing of distribution of planes, is produced.

УДК 514.76

***К.В. Полякова***

*(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)*

## ПОВЕРХНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрено пространство проективной связности и найдены некоторые соотношения на компоненты его тензора кривизны-кручения. Рассмотрена поверхность в пространстве проективной связности и доказано, что кривизна групповой связности, образует тензор, содержащий четыре подтензора. Сопоставлены приемы Г.Ф. Лаптева и Ю.Г. Лумисте задания связности, и показано, что они приводят к одинаковым структурным уравнениям для форм связности и сравнениям на компоненты объекта кривизны.

**1. Тензор кривизны-кручения.** Пусть пространство проективной связности $P_{n,n}$ с n-мерными слоями и n-мерной базой определяется системой $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\theta^{I`}_{J`}$ со структурными уравнениями

$$D\theta^{I`}_{J`} = \theta^{K`}_{J`}\wedge\theta^{I`}_{K`} + \tfrac{1}{2}R^{I`}_{J`KL}\theta^{K}_{0}\wedge\theta^{L}_{0},\ \theta^{I`}_{I`} = 0,\ R^{I`}_{J`(KL)} = 0,$$

$$I, J, K,\ldots = 1,\ldots,n;\ I`, J`, K`,\ldots = 0,\ldots, n.$$

Опустим условие $\theta^{I`}_{I`} = 0$ и рассмотрим новые слоевые формы $\omega^{I`}_{J`} = \theta^{I`}_{J`} - \delta^{I`}_{J`}\theta^{0}_{0}$, или подробнее: $\omega^{0}_{0} = 0$, $\omega^{I} = \theta^{I}$ ,

$\omega_I = \theta_I$ , $\omega_J^I = \theta_J^I - \delta_J^I \theta_0^0$ . Новые формы удовлетворяют уравнениям

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I + \tfrac{1}{2} R_{0JK}^I \omega^J \wedge \omega^K ,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + (\delta_J^I \omega_K + \delta_K^I \omega_J) \wedge \omega^K + \tfrac{1}{2} R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L , \quad (1)$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J + \tfrac{1}{2} R_{IJK} \omega^J \wedge \omega^K ;$$

$$R_{0JK}^I = -R_{0KJ}^I ,\ R_{JKL}^I = -R_{JLK}^I ,\ R_{IJK} = -R_{IKJ} .$$

Сохраняем один нуль в индексах для удобства. Дифференцируя (1) внешним образом, получаем равенства

$$(\Delta R_{0JK}^I + R_{0MJ}^I R_{0KL}^M \omega^L - R_{JKL}^I \omega^L) \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 ,$$

$$(\Delta R_{JKL}^I - (\delta_J^M R_{0KL}^I + \delta_J^I R_{0KL}^M)\omega_M +$$

$$+ (R_{JSK}^I R_{0LM}^S + \delta_M^I R_{KLJ} + \delta_J^I R_{KLM})\omega^M) \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0 ,$$

$$(\Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L \omega_L + R_{IMJ} R_{0KL}^M \omega^L) \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 ,$$

для выполнения которых достаточно, например, наличия следующих разложений:

$$\Delta R_{0JK}^I + (R_{0M[J}^I R_{|0|K]L}^M - R_{[JK]L}^I)\omega^L = R_{0JKL}^I \omega^L ,$$

$$\Delta R_{JKL}^I - (\delta_J^M R_{0KL}^I + \delta_J^I R_{0KL}^M)\omega_M +$$
$$+ (R_{JS[K}^I R_{|0|L]M}^S + \delta_M^I R_{[KL]J} + \delta_J^I R_{[KL]M})\omega^M = R_{JKLM}^I \omega^M , \quad (2)$$

$$\Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L \omega_L + R_{IM[J} R_{|0|K]L}^M \omega^L = R_{IJKL} \omega^L ;$$

$$R_{0\{JKL\}}^I = 0 ,\ R_{J\{KLM\}}^I = 0 ,\ R_{I\{JKL\}} = 0 , \quad (3)$$

где по индексам в фигурных скобках производится циклирование. Тогда кососимметричные по двум последним нижним индексам компоненты $R_{0JK}^I$ , $R_{JKL}^I$ , $R_{IJK}$ тензора кривизны-кручения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta R^I_{0JK} = \overline{R}^I_{0JKL}\omega^L,\ \Delta R^I_{JKL} - (\delta^M_J R^I_{0KL} + \delta^I_J R^M_{0KL})\omega_M = \overline{R}^I_{0JKL}\omega^L,\ (4)$$

$$\Delta R_{IJK} + R^L_{IJK}\omega_L = \overline{R}_{IJKL}\omega^L,$$

причем

$$\overline{R}^I_{0JKL} = R^I_{0JKL} - R^I_{0M[J}R^M_{|0|K]L} + R^I_{[JK]L},$$

$$\overline{R}^I_{JKLM} = R^I_{JKLM} - R^I_{JS[K}R^S_{|0|L]M} - \delta^I_M R_{[KL]J} - \delta^I_J R_{[KL]M},$$

$$\overline{R}_{IJKL} = R_{IJKL} - R_{IM[J}R^M_{|0|K]L}.$$

Естественно предполагать, что $\overline{R}^I_{0(JK)L} = 0$, $\overline{R}^I_{J(KL)M} = 0$, $\overline{R}_{I(JK)L} = 0$.

Из (4) видно, что тензор кривизны-кручения R={ $R^I_{0JK}$, $R^I_{JKL}$, $R_{IJK}$ } содержит два подтензора: подтензор кручения { $R^I_{0JK}$ } и подтензор аффинной кривизны-кручения [1] { $R^I_{0JK}$, $R^I_{JKL}$ }.

***Замечание 1.*** Можно получить более общее выражение [1], чем (2), если сначала применить лемму Лаптева, а затем — лемму Картана.

Записывая ($1_1$) в виде $D\omega^I = \omega^J \wedge \overline{\omega}^I_J$, найдем, что

$$D\,\overline{\omega}^I_J = \overline{\omega}^K_J \wedge \overline{\omega}^I_K + \omega^K \wedge \overline{\omega}^I_{JK}, \quad (5)$$

где

$$\overline{\omega}^I_{JK} = -\tfrac{1}{2}R^I_{0JKL}\omega^L - (\delta^I_J\omega_K + \delta^I_K\omega_J). \quad (6)$$

Из (6) следует, что $\overline{\omega}^I_{[JK]} = -\tfrac{1}{2}R^I_{0JKL}\omega^L$, т. е. несимметричные в общем случае формы $\overline{\omega}^I_{JK}$ симметричны, если равен нулю продолженный тензор кручения { $R^I_{0JK}$, $R^I_{0JKL}$ }. Дифференциальные сравнения непреобразованных пфаффовых производных $R^I_{0JKL}$ компонент тензора кручения имеют вид:

$$\Delta R^{I}_{0JKL} + (\delta^{I}_{[J} R^{M}_{|0|K]L} - \delta^{I}_{L} R^{M}_{0JK})\omega_M + R^{I}_{0JK}\omega_L - R^{I}_{0L[J}\omega_{K]} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{I}).$$

***Замечание 2.*** Для выполнения (2) можно потребовать более сильные, чем (3), условия

$$R^{I}_{0J[KL]} = 0,\ R^{I}_{JK[LM]} = 0,\ R_{IJ[KL]} = 0.$$

Тогда слагаемое $R^{I}_{0JKL}\theta^{K}_{0} \wedge \theta^{L}_{0}$ в формуле (5) обращается в нуль в силу симметричности по K, L и формы (6) упрощаются: $\overline{\omega}^{I}_{JK} = -(\delta^{I}_{J}\omega_K + \delta^{I}_{K}\omega_J)$ — и становятся симметричными по J, K.

**Утверждение 1.** *Если пространство* $P_{n,n}$ *без кручения, т. е.*

$$R^{I}_{0JK} = 0,\ \text{\textit{то}}\ R^{I}_{\{JKL\}} = 0.$$

Действительно, дифференцируя внешним образом уравнения $D\,\omega^{I} = \omega^{J} \wedge \omega^{I}_{J}$, получим $\frac{1}{2} R^{I}_{JKL}\omega^{J} \wedge \omega^{K} \wedge \omega^{L} = 0$, откуда следует доказываемое.

**Утверждение 2.** *Если тензор аффинной кривизны-кручения* $\{R^{I}_{0JK},\ R^{I}_{JKL}\}$ *равен нулю, то* $R_{J\{KL}\delta^{I}_{M\}} + \delta^{I}_{J} R_{\{KLM\}} = 0$.

Действительно, дифференцируя уравнения
$D\omega^{I}_{J} = \omega^{K}_{J} \wedge \omega^{I}_{K} + (\delta^{I}_{J}\omega_K + \delta^{I}_{K}\omega_J) \wedge \omega^{K}$ найдем
$(\delta^{I}_{J} R_{KLM} + \delta^{I}_{M} R_{JKL})\omega^{K} \wedge \omega^{L} \wedge \omega^{M} = 0$, откуда следует утверждение.

**2. Поверхность.** Поверхность $X_m$ в пространстве $P_{n,n}$ зададим уравнениями $\omega^{a} = 0$, дифференцируя которые, получим

$$(\omega^{a}_{i} + \tfrac{1}{2} R^{a}_{0ij}\omega^{j}) \wedge \omega^{i} = 0, \qquad (7)$$

где i, j, k = 1,…,m; a, b, c = m+1,…,n. Разрешая (7) по лемме Картана, получаем:

$$\omega^{a}_{i} + \tfrac{1}{2} R^{a}_{0ij}\omega^{j} = \Lambda^{a}_{ij}\omega^{j}\ (\Lambda^{a}_{ij} = \Lambda^{a}_{ji}),$$

откуда $\omega^{a}_{i} = \overline{\Lambda}^{a}_{ij}\omega^{j}$, причем коэффициенты

$$\overline{\Lambda}^a_{ij} = \Lambda^a_{ij} - \tfrac{1}{2}R^a_{0ij}$$

в общем случае несимметричны по i, j, причем $\overline{\Lambda}^a_{[ij]} = -\tfrac{1}{2}R^a_{0ij}$.

Уравнения (1) на поверхности $X_m$ принимают вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \tfrac{1}{2}R^i_{0jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} + \tfrac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

$$D\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^i \wedge \omega^a_{bi} + \tfrac{1}{2}R^a_{bij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad (8)$$

$$D\omega^i_a = \omega^K_a \wedge \omega^i_K + \omega^j \wedge \omega^i_{aj} + \tfrac{1}{2}R^i_{ajk}\omega^j \wedge \omega^j,$$

$$D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij} + \tfrac{1}{2}R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где введены обозначения:

$$\omega^i_{jk} = \overline{\Lambda}^a_{jk}\omega^i_a - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j, \quad \omega^a_{bi} = -\overline{\Lambda}^a_{ji}\omega^j_b - \delta^a_b\omega_i,$$

$$\omega^i_{aj} = \delta^i_j\omega_a, \quad \omega_{ij} = \overline{\Lambda}^a_{ij}\omega_a.$$

Учитывая уравнения поверхности $\omega^a = 0$ и разбиение индекса $I = (i, a)$, уравнения (4) можно записать подробнее в виде сравнений по модулю базисных форм $\omega^i$

$$\Delta R^i_{0jk} + R^a_{0jk}\omega^i_a \equiv 0, \quad \Delta R^a_{0jk} \equiv 0, \quad \Delta R^a_{ijk} - R^a_{0jk}\omega_i \equiv 0,$$

$$\Delta R^i_{jkl} + R^a_{jkl}\omega^i_a - (\delta^i_j\omega_s + \delta^i_s\omega_j)R^s_{0kl} - \delta^i_j R^a_{0kl}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta R_{ijk} + R^L_{ijk}\omega_L \equiv 0,$$

$$\Delta R^a_{bij} - R^a_{kij}\omega^k_b - (\delta^a_b\omega_c + \delta^a_c\omega_b)R^c_{0ij} - \delta^a_b R^k_{0ij}\omega_k \equiv 0,$$

$$\Delta R^i_{ajk} + R^b_{ajk}\omega^i_b - R^i_{ljk}\omega^l_a - R^i_{0jk}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta R_{aij} - R_{kij}\omega^k_a + R^L_{aij}\omega_L \equiv 0.$$

Таким образом, тензор R содержит следующие восемь подтензоров: $\{R^a_{0ij}\}$, $\{R^a_{0ij}, R^i_{0jk}\}$, $\{R^a_{0ij}, R^a_{ijk}\}$, $R_1=\{R^a_{0ij}, R^i_{0jk}, R^a_{ijk}\}$, $\{R_1, R^i_{jkl}\}$, $\{R_1, R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$, $\{R_1, R^a_{bij}\}$, $\{R_1, R^i_{jkl}, R^a_{bij}, R^i_{ajk}\}$.

***Замечание 3.*** Обращая эти восемь тензоров в нуль, можно получить результаты, аналогичные полученным в утверждениях 1 и 2. Например, если $R^{a}_{0ij}$, то $R^{a}_{\{ijk\}} = R^{l}_{0\{jk}\Lambda^{a}_{i\}l}$.

Если $R^{a}_{0ij}$ =0, $R^{i}_{0jk}$ =0, то $R^{a}_{\{ijk\}} = 0$, $R^{i}_{\{jkl\}} = 0$. Если $R^{a}_{0ij}$ =0, $R^{a}_{ijk}$=0, то $R^{l}_{0\{jk}\Lambda^{a}_{i\}l} = 0$, $R^{a}_{b\{jk}\Lambda^{b}_{l\}i} = 0$. Если $R_1$ =0, то $R^{i}_{\{jkl\}} = 0$, $R^{a}_{b\{jk}\Lambda^{b}_{l\}i} = 0$.

**Утверждение 3.** *Если тензор* $R^{a}_{0ij}$ = 0, то $\overline{\Lambda}^{a}_{ij} = \Lambda^{a}_{ij}$, *т. е. компоненты* $\overline{\Lambda}^{a}_{ij}$ *симметричны по нижним индексам.*

Компоненты $\overline{\Lambda}^{a}_{ij}$ образуют тензор, т. е. $\Delta\overline{\Lambda}^{a}_{ij} = \overline{\Lambda}^{a}_{ijk}\omega^{k}$, где

$$\overline{\Lambda}^{a}_{ijk} = \Lambda^{a}_{ijk} + \tfrac{1}{2}(\overline{\Lambda}^{a}_{il}R^{l}_{0jk} - R^{a}_{ijk}) .$$

Пфаффовы производные $\overline{\Lambda}^{a}_{ijk}$ удовлетворяют равенствам

$\overline{\Lambda}^{a}_{i[jk]} = \tfrac{1}{2}(\overline{\Lambda}^{a}_{il}R^{l}_{0jk} - R^{a}_{ijk})$ .

**Утверждение 4.** *Если* $R_1$= 0*, то* $\overline{\Lambda}^{a}_{ijk} = \overline{\Lambda}^{a}_{ikj}$ .

***Замечание 4.*** Уравнения ($7_1$) запишем следующим образом:

$$D\,\omega^{i} = \omega^{j} \wedge \overline{\omega}^{i}_{j} ,$$

где $\overline{\omega}^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} + \tfrac{1}{2}R^{i}_{0jk}\omega^{k}$. Внешний дифференциал форм $\overline{\omega}^{i}_{j}$ приведем к виду:

$$D\,\overline{\omega}^{i}_{j} = \overline{\omega}^{k}_{j} \wedge \overline{\omega}^{i}_{k} + \omega^{k} \wedge \overline{\omega}^{i}_{jk} ,$$

причем $\overline{\omega}^{i}_{[jk]} = -\tfrac{1}{2}R^{i}_{0[jk]l}\omega^{l}$. Компоненты $R^{i}_{0jkl}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta R^{i}_{0jkl} \equiv -R^{a}_{0jkl}\omega^{i}_{a} - (\delta^{i}_{[j}R^{I}_{|0|k]l} - \delta^{i}_{l}R^{I}_{0jk})\omega_{I} - R^{i}_{0jk}\omega_{l} + R^{i}_{0l[j}\omega_{k]}) .$$

Кроме того,

$$\Delta R^{a}_{0jkl} \equiv -R^{a}_{0jk}\omega_{l} + R^{a}_{0l[j}\omega_{k]} .$$

Следовательно, формы $\overline{\omega}^i_{jk}$ симметричны, если тензор $\{R^a_{0ij}$, $R^i_{0jk}$, $R^i_{0jkl}$, $R^a_{0jkl}\}$ равен нулю.

**3. Связность.** Рассмотрим новые слоевые формы

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k,\ \tilde{\omega}_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j,\ \tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\omega^i,$$
$$\tilde{\omega}^i_a = \omega^i_a - \Gamma^i_{aj}\omega^j,\ \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\omega^i. \qquad (9)$$

На примере форм $\tilde{\omega}^i_j$ продемонстрируем прием Ю.Г. Лумисте [2; 3] задания связности. Внешний дифференциал форм $\tilde{\omega}^i_j$ приведем к виду:

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \omega^k \wedge [(\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) + (\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} + \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{js}R^s_{0lk} + \tfrac{1}{2}R^i_{jkl})\ \omega^l]. \qquad (10)$$

Согласно теореме Картана – Лаптева [3] получаем

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\ \omega^l. \qquad (11)$$

При этом (10) имеет вид

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + K^i_{jkl}\ \omega^k \wedge \omega^l, \qquad (12)$$

Где компоненты объекта кривизны $K^i_{jkl}$ выражаются по формуле

$$K^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]} - \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{js}R^s_{0kl} + \tfrac{1}{2}R^i_{jkl}. \qquad (13)$$

Пфаффовы производные $\Gamma^i_{jkl}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} \equiv -\Gamma^s_{jk}\omega^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\omega^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\omega^s_{kl} + \delta^i_l\overline{\Lambda}^a_{jk}\omega_a + \delta^i_k\overline{\Lambda}^a_{jl}\omega_a + \delta^i_j\overline{\Lambda}^a_{kl}\omega_a - \overline{\Lambda}^a_{jkl}\omega^i_a. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что компоненты объекта кривизны $K^i_{jkl}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta K^i_{jkl} \equiv 0. \qquad (15)$$

Аналогично можно показать, что структурные уравнения остальных форм связности (9) имеют вид:

$$D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i^j \wedge \tilde{\omega}_j + K_{ijk}\, \omega^j \wedge \omega^k,\ D\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + K_{bij}^a\, \omega^i \wedge \omega^j,$$

$$D\tilde{\omega}_a^i = \tilde{\omega}_a^j \wedge \tilde{\omega}_j^i + \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b^i + K_{ajk}^i\, \omega^j \wedge \omega^k, \qquad (16)$$

$$D\tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_a^i \wedge \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + K_{aij}\, \omega^i \wedge \omega^j,$$

где остальные компоненты объекта кривизны связности выражаются по формулам

$$K_{ijk} = \Gamma_{i[jk]} - \Gamma_{i[j}^l \Gamma_{|l|k]} - \tfrac{1}{2}\Gamma_{il} R_{0jk}^l + \tfrac{1}{2} R_{ijk},$$

$$K_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{|c|j]}^a - \tfrac{1}{2}\Gamma_{bk}^a R_{0ij}^k + \tfrac{1}{2} R_{bij}^a,$$

$$K_{ajk}^i = \Gamma_{a[jk]}^i - \Gamma_{a[j}^l \Gamma_{|l|k]}^i - \Gamma_{a[j}^b \Gamma_{|b|k]}^i - \tfrac{1}{2}\Gamma_{al}^i R_{0jk}^l + \tfrac{1}{2} R_{ajk}^i,$$

$$K_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^k \Gamma_{|k|j]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{|b|j]} - \tfrac{1}{2}\Gamma_{ak} R_{0ij}^k + \tfrac{1}{2} R_{aij}$$

и удовлетворяют сравнениям

$$\Delta K_{ijk} + K_{ijk}^l \omega_l \equiv 0,\ \Delta K_{bij}^a \equiv 0,$$

$$\Delta K_{ajk}^i + K_{ajk}^b \omega_b^i - K_{ljk}^i \omega_a^l \equiv 0,$$

$$\Delta K_{aij} + K_{aij}^k \omega_k + K_{aij}^b \omega_b - K_{kij} \omega_a^k \equiv 0. \qquad (17)$$

**Теорема 1.** *Объект кривизны* K={ $K_{jkl}^i$, $K_{ijk}$, $K_{bij}^a$, $K_{ajk}^i$, $K_{aij}$ } *групповой связности, задаваемой объектом* Γ={ $\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}$ }, *является тензором и содержит два простейших подтензора* { $K_{jkl}^i$ }, { $K_{bij}^a$ } *и два простых подтензора* { $K_{jkl}^i$, $K_{ijk}$ }, { $K_{jkl}^i$, $K_{bij}^a$, $K_{ajk}^i$ }.

Рассмотрим теперь прием Г.Ф. Лаптева [4] задания связности также на примере форм $\tilde{\omega}_j^i$. Исходя из (10) вместо уравнений (11) возьмем уравнения

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}+(\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk}+\tfrac{1}{2}\Gamma^i_{js}R^s_{0lk}+\tfrac{1}{2}R^i_{jkl})\,\omega^l=\mathit{\Gamma}^i_{jkl}\,\omega^l .$$

Тогда (10) примет вид

$$D\,\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k+\boldsymbol{K}^i_{jkl}\,\omega^k\wedge\omega^l,$$

где $\boldsymbol{K}^i_{jkl}=\mathit{\Gamma}^i_{j[kl]}$, причем $\Delta\,\boldsymbol{K}^i_{jkl}\equiv 0$.

Аналогичным образом показывая справедливость сравнений (17) для компонент $\boldsymbol{K}_{ijk}=\mathit{\Gamma}_{i[jk]}$, $\boldsymbol{K}^a_{bij}=\mathit{\Gamma}^a_{b[ij]}$, $\boldsymbol{K}^i_{ajk}=\mathit{\Gamma}^i_{a[jk]}$, $\boldsymbol{K}_{aij}=\mathit{\Gamma}_{a[ij]}$, получаем, что имеет место

**Теорема 2.** *Приемы Г.Ф. Лаптева и Ю.Г. Лумисте задания связности в расслоении* $G(X_m)$ *приводят к одинаковым структурным уравнениям для форм связности* (9)*, а также к одним и тем же дифференциальным сравнениям на компоненты объекта кривизны.*

***Замечание 5.*** Сопоставление приемов Лаптева и Лумисте задания связности в произвольном главном расслоении осуществлено в работе [5], из которой непосредственно не вытекают дифференциальные сравнения (17).

***Замечание 6.*** Если тензор $R=\{R^I_{0JK},\ R^I_{JKL},\ R_{IJK}\}$ равен нулю, то пространство проективной связности $P_{n,n}$ становится проективным пространством $P_n$, а все полученные в пунктах 2, 3 уравнения и выражения подходят для поверхности $X_m$, рассмотренной в проективном пространстве $P_n$ [6; 7].

***Замечание 7.*** Если $R^a_{0ij}=0$, то уравнения ($8_1$), (12), ($16_1$) определяют пространство центропроективной связности $P^*_{n,n}$ [6]. Уравнения ($8_1$, 12, 16) определяют пространство групповой связности.

### *Список литература*

1. *Shevchenko Yu.I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartan`s connection // Избр. вопр. совр. матем. Калининград, 2005. С. 49—52.

2. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. (1966). Т. 69. С. 434—469.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—248.

4. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюзного Матем. съезда. Л., 1964. Т. 2. С. 226—233.

5. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

7. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. Вып. 27. С. 63—70.

K. Polyakova

SURFACE IN THE PROJECTIVELY CONNECTED SPACE

Projectively connected space is investigated, some conditions on components of its curvature-torsion tensor are found. The surface is considered in the projectively connected space; it is proved, curvature of group connection is a tensor, containing 4 subtensors. G.F. Laptev`s and Yu.G. Lumiste`s ways of the giving of connections are compared. It is shown, the ways lead to the same structure equations for the connection forms and comparisons on the components of the curvature object.

УДК 514.75

***Ю.И. Попов***

*(Российский государственный университет им. ммануила. Канта)*