тей в проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.9.Калининград, 1978,с.124-134.

4.Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12,Калининград,1981,с.126-130.

5. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.П.Цапенко

## СЕМЕЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ,АССОЦИИРОВАННЫХ С ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ $V_{n-1}$

В $n$-мерном проективном пространстве рассмотрим $(n-1)$-параметрическое невырожденное многообразие пар фигур $(P,Q)$ -гиперконгруэнцию $V_{n-1}$ .Здесь $Q$ -гиперквадрика,а $P$ -неинцидентная ей точка.

Отнесем многообразие $V_{n-1}$ к реперу $R=\{A,A_i,A_n\}$ $(A=A_0;\ i,j,k\ldots=\overline{1,n-1})$ ,где вершина $A$ помещена в точку $P$ ,а вершины $A_i$ - в касательную гиперплоскость $T_{n-1}$ к гиперповерхности $S_{n-1}$,описанной точкой $P$ .Уравнение гиперквадрики $Q$ и система уравнений Пфаффа многообразия $V_{n-1}$ запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2a_{0\alpha}x^0x^\alpha+(x^0)^2=0,$$
$$\omega_0^n=0,\quad \omega_i^n=\Lambda_{ij}\omega_0^j\quad (\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}),$$
$$\nabla a_{\alpha\beta}-a_{0\alpha}\omega_\beta^0-a_{0\beta}\omega_\alpha^0=a_{\alpha\beta i}\omega_0^i,$$
$$\nabla a_{0\alpha}-\omega_\alpha^0=a_{0\alpha i}\omega_0^i\quad (\alpha,\beta,\ldots=1,2,\ldots,n),$$

где оператор $\nabla$ определяется по правилу $\nabla E_{a_1\ldots a_\tau}=dE_{a_1\ldots a_\tau}-E_{b a_2\ldots a_\tau}\omega_{a_1}^b-\ldots-E_{a_1\ldots a_{\tau-1}b}\omega_{a_\tau}^b+\tau E_{a_1\ldots a_\tau}\omega_0^0$.

Рассматривая структурные уравнения,которым удовлетворяют базисные формы $\omega_0^i$ и вторичные формы $\omega_0^0,\omega_j^i,\omega_i^0,\omega_n^n,\omega_n^i,\omega_n^0$, получаем,что с гиперконгруэнцией $V_{n-1}$ ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$,базой которого является гиперповерхность $S_{n-1}$ ,а типовым слоем - подгруппа стационарности $G_\tau$ $(\tau=n^2+1)$ центрированной гиперплоскости $T_{n-1}$ .В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$фундаментально-групповую связность зададим по Г.Ф.Лаптеву [1],вводя формы связности:

$$\tilde{\omega}^0_0=\omega^0_0-\Gamma_k\omega^k_0,\quad \tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k_0,\quad \tilde{\omega}^0_i=\omega^0_i-\Gamma_{ik}\omega^k_0,$$
$$\tilde{\omega}^n_n=\omega^n_n-\Pi_k\omega^k_0,\quad \tilde{\omega}^i_n=\omega^i_n-\Gamma^i_k\omega^k_0,\quad \tilde{\omega}^0_n=\omega^0_n-L_k\omega^k_0,$$
где $\Gamma=\{\Gamma_k,\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ik},\Pi_k,\Gamma^i_k,L_k\}$-объект связности.

Л е м м а 1. Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно к каждой касательной гиперплоскости $T_{n-1}$ присоединить: 1/точку $B$, не принадлежащую гиперплоскости $T_{n-1}$; 2/($n-2$)-мерную плоскость $P_{n-2}$, принадлежащую касательной гиперплоскости $T_{n-1}$ и не проходящую через ее центр $A$ (нормаль второго рода в смысле А.П.Нордена [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точку $B$ зададим следующим образом $B=\lambda A+\lambda^i A_i+A_n$, причем
$$d\lambda+\lambda^i\omega^0_i+\lambda(\omega^0_0-\omega^n_n)+\omega^0_n=\lambda_j\omega^j_0,$$
$$d\lambda^i+\lambda^j\omega^i_j-\lambda^i\omega^n_n+\omega^i_n=\lambda^i_j\omega^j_0.$$
Нормаль второго рода $P_{n-2}$ определим системой точек $B_i=A_i+\mu_i A$, где
$$\nabla\mu_i+\omega^0_i=\mu_{ij}\omega^j_0. \tag{1}$$
Указанное в лемме оснащение задается полем квазитензора $\lambda=(\lambda,\lambda^i,\mu_i)$ на базе $S_{n-1}$, который вместе с фундаментальным тензором $\Lambda_{ij}$ позволяет охватить компоненты объекта связности $\Gamma$ по формулам:
$$\Gamma_i=\mu_i,\quad \Gamma^i_{jk}=\lambda^i\Lambda_{jk}-\delta^i_k\mu_j,\quad \Gamma_{ij}=\lambda\Lambda_{ij}-\mu_i\mu_j,$$
$$\Pi_i=-\Lambda_{ij}\lambda^j,\quad \Gamma^i_j=\delta^i_j\mu_k\lambda^k-\lambda^i\lambda^k\Lambda_{jk}-\delta^i_j\lambda,$$
$L_i=\mu_i\mu_k\lambda^k-\lambda\mu_i-\Lambda_{ij}\lambda^j\lambda$. Присоединение нормали первого рода $P_1$ в смысле А.П.Нордена [2] к каждой касательной гиперплоскости $T_{n-1}$ позволяет определить оснащение Картана [3] гиперповерхности $S_{n-1}$ [1].

Т е о р е м а 1. Нормализация А.П.Нордена гиперповерхности $S_{n-1}$ позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

Т е о р е м а 2. Для определения связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно нормали первого рода $P_1$.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную совокупность величин $\Lambda_k=(n+1)^{-1}\Lambda_{ijk}V^{ij}$, где $V^{ij}$ - тензор, обратный к тензору $\Lambda_{ij}$. Функции $\Lambda_k$ удовлетворяют системе уравнений $\nabla\Lambda_k-\Lambda_{tk}\omega^t_n+\omega^0_k=\tilde{\Lambda}_{kj}\omega^j_0$. Построим теперь систему величин $\tilde{\mu}_i=\Lambda_i+\Lambda_{ij}\lambda^j$, где
$$\nabla\tilde{\mu}_i+\omega^0_i=\tilde{\mu}_{ij}\omega^j_0. \tag{2}$$
Сравнивая уравнения (1) с уравнениями (2), видим, что объект $\tilde{\mu}_i$ задает нормаль второго рода $P_{n-2}$, которая в свою очередь определена заданием нормали первого рода. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 3. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ может быть определена лишь с помощью нормали второго рода.

Т е о р е м а 4. Связность в расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает внутренним образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 для определения связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно задания нормали второго рода $P_{n-2}$. Точки $B_i=-a_{0i}A+A_i$ задают ($n-2$)-мерное пересечение касательной гиперплоскости $T_{n-1}$ с гиперплоскостью, полярно-сопряженной точке $A$ относительно гиперквадрики $Q$, которое и является нормалью второго рода гиперповерхности $S_{n-1}$.

Подобъекты объекта связности $\Gamma$ могут быть охарактеризованы следующим образом: 1/подобъект $\Gamma^i_{jk}$ объекта связности $\Gamma$ характеризуется проекцией на нормаль II-го рода $P_{n-2}$ смежной с ней нормали $P_{n-2}+dP_{n-2}$ из центра $P_1$; 2/проекция на точку $B$ смежной с ней точки $B+dB$ из центра $T_{n-1}$ характеризует подобъект $\Pi_i$ объекта связности $\Gamma$; 3/если касательная прямая переносится параллельно по А.П.Нордену в линейной связности, определяемой объектом $\Gamma^i_{jk}$, то точка ее пересечения с нормалью 2-го рода $P_{n-2}$ смещается в плоскости, натянутой на эту прямую и точку Картана $B$; 4/если касательная прямая переносится параллельно в связности $\Gamma_1 = \{\Gamma_i, \Gamma_{ij}, \Gamma^i_{jk}\}$, то точка пересечения ее с нормалью второго рода $P_{n-2}$ смещается вдоль прямой, определяемой этой точкой и точкой Картана $B$; 5/ нормаль первого рода $P_1$ переносится параллельно в связности $\Gamma_2 = (\Gamma^i_{jk}, \Pi_k, \Gamma^i_k)$ тогда и только тогда, когда точка $B$ смещается в нормали первого рода.

Список литературы

1. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева.-Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., 1976.

3. Cartan E. Les espaces a connexion projective. -Тр.семинара по вект.и тенз.анализу, 1937, вып.4, с.147-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Ю.И.Ш е в ч е н к о

# ОБ ОСНАЩЕНИИ КАРТАНА

Найдены условия, при которых подобъект объекта, характеризующего отображение друг на друга близких касательных плоскостей оснащенной по Картану поверхности проективного пространства, является объектом связности с точки зрения расслоенных пространств.

Отнесем $n$-мерное проективное пространство $P_n$ к подвижному реперу $\{A_J\}$ $(J, \mathcal{J}, K = 0, 1, \dots, n)$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_J = \omega^K_J A_K$ $(\omega^J_J = 0)$. Инвариантные формы проективной группы $\omega^K_J$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega^K_J = \omega^{\mathcal{J}}_J \wedge \omega^K_{\mathcal{J}}. \qquad (1)$$

В пространстве $P_n$ рассмотрим $m$-поверхность $X_m$ общего вида и произведем специализацию подвижного репера $\{A_J\}$, помещая вершину $A_0$ в текущую точку поверхности $X_m$, а вершины $A_i$ $(i, j, k, \ell = \overline{1,m})$ -в соответствующую касательную плоскость $T_m$. Поверхность $X_m$ в таком репере определяется уравнениями

$$\omega^\alpha_0 = 0 \quad (\alpha, \beta = \overline{m+1, n}), \qquad (2)$$

$$\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j \quad (\omega^j = \omega^j_0). \qquad (3)$$

Замыкая систему (2), получим $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Продолжая систему (3), найдем

$$\nabla b^\alpha_{ij} + b^\alpha_{ij}\omega^0_0 = b^\alpha_{ijk}\omega^k, \qquad (4)$$

где дифференциальный оператор $\nabla$ действует следующим образом:

$$\nabla b^\alpha_{ij} = db^\alpha_{ij} - b^\alpha_{ik}\omega^k_j - b^\alpha_{kj}\omega^k_i + b^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta$$

В дальнейшем системы уравнений типа (4) будем записывать