УДК 514.75

К. В. Полякова

*(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СИМВОЛОВ КРОНЕКЕРА В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрены два подхода к заданию индуцированной линейной связности на поверхности проективного пространства.

Ключевые слова: поверхность проективного пространства, линейная связность, гиперплоскость Бортолотти, обобщенные символы Кронекера.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I A+\omega_I^J A_J\ (I, J,...=\overline{1,n}),$$

а базисные формы ω^I, ω_I, ω_I^J проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n, удовлетворяют структурным уравнениям Картана [1, с.173]

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,$$

$$D\omega_J^I=\omega_J\wedge\omega^I+\omega_J^K\wedge\omega_K^I+\delta_J^I\omega_K\wedge\omega^K,\ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J.$$

Поверхность X_m ($1\le m<n$), рассматриваемая в пространстве P_n как многообразие точек [2; 3], задается системой уравнений

$$\omega^a=\Lambda_i^a\omega^i\ \ (i, j,...=\overline{1,m};\ a, b,...=\overline{m+1,n}),$$

причем

$$\Delta \Lambda_{\underline{i}}^{a} + \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a\ \omega^j,$$

где $\Delta \Lambda_{\underline{i}}^{a} = d\Lambda_i^a + \Lambda_i^b \omega_b^a - \Lambda_j^a \Omega_i^j$, $\Omega_j^i = \omega_j^i + \Lambda_j^a \omega_a^i$.

С поверхностью ассоциируется главное расслоение линейных реперов со структурными уравнениями

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i, \tag{1}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^i \wedge \omega_{Ji}^I, \tag{2}$$

где

$$\omega_{Ji}^I = -\delta_J^I(\omega_i + \Lambda_i^a \omega_a) - \omega_J(\delta_i^I + \delta_a^I \Lambda_i^a), \tag{3}$$

причем δ_J^I — обычный, δ_i^I, δ_a^I — обобщенные символы Кронекера [4]. Распишем подробно уравнения (2), чтобы не использовать обобщенные символы в обозначении (3):

$$\begin{aligned} D\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_j^a \wedge \omega_a^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \\ D\omega_a^i &= \omega_a^k \wedge \omega_k^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i, \\ D\omega_i^a &= \omega_i^j \wedge \omega_j^a + \omega_i^b \wedge \omega_b^a + \omega^j \wedge \omega_{ij}^a, \\ D\omega_b^a &= \omega_b^i \wedge \omega_i^a + \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a; \end{aligned} \tag{4}$$

обозначения (3) при этом принимают вид:

$$\omega_{jk}^i = -\delta_j^i(\omega_k + \Lambda_k^a \omega_a) - \delta_k^i \omega_j,\ \omega_{aj}^i = -\delta_j^i \omega_a,$$

$$\omega_{ij}^a = -\Lambda_j^a \omega_i,\ \omega_{bi}^a = -\delta_b^a(\omega_i + \Lambda_i^c \omega_c) - \Lambda_i^a \omega_b.$$

Линейную связность в расслоении (1, 4) зададим с помощью форм

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k,\ \tilde{\omega}_a^i = \omega_a^i - \Gamma_{aj}^i \omega^j,$$

$$\tilde{\omega}_i^a = \omega_i^a - \Gamma_{ij}^a \omega^j,\ \tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \omega^i.$$

Дифференцируя эти формы внешним образом и применяя теорему Картана — Лаптева, получаем, что система уравнений на компоненты объекта линейной связности имеет вид:

$$\Delta\Gamma^i_{j\underline{k}} + \Gamma^a_{jk}\omega^i_a - \Gamma^i_{ak}\omega^a_j + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l,$$
$$\Delta\Gamma^i_{a\underline{j}} + \Gamma^b_{aj}\omega^i_b - \Gamma^i_{kj}\omega^k_a + \omega^i_{aj} = \Gamma^i_{ajk}\omega^k,$$
$$\Delta\Gamma^a_{i\underline{j}} + \Gamma^k_{ij}\omega^a_k - \Gamma^a_{bj}\omega^b_i + \omega^a_{ij} = \Gamma^a_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$
$$\Delta\Gamma^a_{b\underline{i}} + \Gamma^j_{bi}\omega^a_j - \Gamma^a_{ji}\omega^j_b + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{bij}\omega^j.$$

Записывая [2] уравнения расслоения в компактном виде (1, 2), а формы связности в виде $\widetilde{\omega}^I_J = \omega^I_J — \Gamma^I_{Ji}\ \omega^i$, получаем, что объект линейной связности удовлетворяет уравнению

$$\Delta\ \Gamma^I_{J\underline{i}} + \omega^I_{Ji} = \Gamma^I_{Jij}\ \omega^j, \tag{6}$$

которое в подробной записи совпадает с системой (5). Структурные уравнения для форм $\widetilde{\omega}^i_j$, $\widetilde{\omega}^i_a$, $\widetilde{\omega}^a_i$, $\widetilde{\omega}^a_b$ также являются подробной записью структурных уравнений для форм $\widetilde{\omega}^I_J$. Очевидно, это верно и для выражений компонент объекта линейной кривизны. Для нахождения уравнений на объект линейной кривизны (в подробной и компактной форме) надо предварительно найти уравнения на компоненты пфаффовых производных объекта линейной связности, т. е. продолжить уравнения (5) и (6). В уравнениях (5) нет обобщенных символов Кронекера, а в (6) дифференцирование их (как констант) дает нули, что не приводит при продолжении к другому результату. Это же подтверждается установленным псевдотензорным характером объекта линейной кривизны R^I_{Jij} в компактной форме [3], т. е. $\Delta R^I_{J\underline{ij}} \equiv 0$.

Зададим гиперплоскость Бортолотти точками $B_I = A_I + \lambda_I A$, причем

$$\Delta\lambda_I + \omega_I = \lambda_{Ii}\omega^i, \tag{7}$$

где $\Delta\lambda_I = d\lambda_I - \lambda_J\omega^J_I$.

Используя для символа Кронекера δ^I_J равенство

$$\Delta\delta_J^I \overset{def}{=} d\delta_J^I + \delta_J^K \omega_K^I - \delta_K^I \omega_J^K = \omega_J^I - \omega_J^I = 0\,,$$

найдем соотношения, которым удовлетворяют обобщенные символы

$$\Delta\delta_i^I - \delta_a^I \omega_i^a = 0\,,\ \Delta\delta_a^I - \delta_i^I \omega_a^i = 0\,. \tag{8}$$

При $I = j$ и $I = b$ соотношения (8) в подробной записи становятся очевидными равенствами, например,

$$d\delta_i^j + \delta_i^K \omega_K^j - \delta_k^j \omega_i^k - \underbrace{\delta_a^j}_{0} \omega_i^a =$$

$$= 0 + \delta_i^k \omega_k^j + \underbrace{\delta_i^a}_{0} \omega_a^j - \delta_k^j \omega_i^k = \omega_i^j - \omega_i^j = 0\,.$$

Однако соотношения (8) оказываются полезны при нахождении охвата объекта линейной связности Γ_{Ji}^I. Рассмотрим (6) с учетом (3):

$$\Delta\,\Gamma_{J\underline{i}}^I \equiv \delta_J^I(\omega_i + \Lambda_i^a \omega_a) + \omega_J(\delta_i^I + \delta_a^I \Lambda_i^a)\,, \tag{9}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. Анализируя сравнения (9), можно предположить, что объект Γ_{Ji}^I имеет вид [2]:

$$\Gamma_{Ji}^I = -\delta_J^I \mu_i - \lambda_J \mu_i^I\,, \tag{10}$$

где

$$\mu_i = \lambda_i + \Lambda_i^a \lambda_a\,,\ \mu_i^I = \delta_i^I + \delta_a^I \Lambda_i^a\,, \tag{11}$$

причем

$$\Delta\mu_{\underline{i}} + \omega_i + \Lambda_i^a \omega_a \equiv 0\,,\ \Delta\mu_{\underline{i}}^I \equiv 0\,. \tag{12}$$

Применяя дифференциальный оператор Δ к выражению (9), учитывая обозначения (11) и сравнения (12), получим сравнения (6), что подтверждает правильность гипотезы (10).

Избегая обобщенные символы Кронекера, мы вместо уравнения (6) для объекта Γ^I_{Ji} получаем более подробные уравнения (5), которые сложнее для нахождения охватов. Подробная запись охвата (10) верна с точки зрения системы уравнений (5).

Вывод. *Обобщенные символы Кронекера* δ^I_i, δ^I_a, *удовлетворяющие соотношениям* (8)*, представляют собой удобные понятия, которые существенно упрощают формулы и выкладки, что не приводит к ошибкам и противоречиям (ср.* [5; 6]*).*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Шевченко Ю. И.* Об оснащении многомерной поверхности проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 8. Калининград, 1977. С.135—150.

3. *Полякова К. В.* Вырожденные параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Там же. Вып. 30. С. 64—68.

4. *Golab St.* Tensor calculus. Warszava, 1974.

5. *Малаховский В. С.* Об особенностях применения ковариантного дифференцирования к обобщенным символам Кронекера // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 85—87.

6. *Столяров А. В.* Замечания к применению в научных исследованиях дифференциалов обобщенных символов Кронекера // Там же. С. 144—145.

K. Polyakova

APPLICATION OF GENERALIZED KRONECKER SYMBOLS IN SURFACE THEORY

Two approach to giving induced linear connection on a surface of projective space are considered.