УДК 514.76

ПРИЗНАК КУБИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. Коннов

(Самарский государственный педагогический университет)

Как известно, *проблема алгебраизуемости* для гладких подмногообразий проективного пространства состоит в том, чтобы найти дифференциально-геометрический критерий того, что заданное подмногообразие (несколько подмногообразий) проективного пространства является некоторым алгебраическим многообразием (принадлежат некоторому одному алгебраическому многообразию). В настоящей работе находится дифференциально-геометрический признак кубических гиперповерхностей в проективном пространстве. Для гладкой гиперповерхности V рассматривается многообразие $V\times V\setminus diag(V\times V)$ пар ее различных точек. На $V\times V\setminus diag(V\times V)$ строится трехвалентный ковариантный симметрический тензор C, обращение которого в нуль является необходимым и достаточным условием вырождения гиперповерхности V в гиперкубику. Тензор C выражается через производные не выше третьего порядка, поэтому этот критерий легко может быть применен для практического распознавания кубических гиперповерхностей. Если V_1, V_2, …, V_p – конечная система гиперповерхностей, то найденный критерий может быть модифицирован в признак принадлежности этих гиперповерхностей одной гиперкубике.

Условимся, что в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $u, v, w, \ldots = 0, 1, \ldots, n$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1$. Кроме того, будем предполагать, что $n > 2$.

Пусть W – вещественное векторное пространство размерности n+1, $P(W)$ – порожденное им проективное пространство, $p: W \to P(W)$ – каноническая проекция (*отображение проективизации*). Обозначим через $F(P(W))$ многообразие всех базисов $B = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ пространства W, нормированных условием $e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = 1$. Здесь через $e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ обозначен определитель, составленный из координат векторов $e_0, e_1, \ldots, e_n$ относительно некоторого фиксированного базиса B_0. Каждый базис $B = \{e_u\} \in \ (P(W))$ однозначно определяет проективный репер $\{E_u, E\}$ в $P(W)$ с базисными точками $E_u = p(e_u)$ и единичной точкой $E = p(\sum_{u=0}^{n} e_u)$. Многообразие $F(P(W))$ отождествляется с группой Ли $SL(n+1)$, которая изоморфна связной компоненте единицы $PGL_0(n)$ полной проективной группы $PGL(n)$.

Каждый вектор e_u базиса $B \in F(P(W))$ можно рассматривать как гладкую W-значную функцию ($e_u : B \to e_u$) на группе Ли $PGL_0(n+1)$. Поэтому de_u – это гладкая W-значная 1-форма на $PGL_0(n+1)$. Раскладывая ее по базису B пространства W, получим:

$$de_u = \omega_u^v \otimes e_u. \tag{1}$$

Формы ω_u^v являются *левоинвариантными формами* группы Ли $PGL_0(n+1)$ и удовлетворяют *структурным уравнениям Маурера-Картана*:

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v, \tag{2}$$

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0. \tag{3}$$

Алгебра Ли группы Ли $PGL_0(n+1)$ изоморфна алгебре $sl(n+1)$ бесследовых квадратных матриц порядка $n+1$. Если X – произвольное левоинвариантное векторное поле на $PGL_0(n)$ (т.е. элемент алгебры Ли $sl(n+1)$, $X = (X_v^u)$, $X_u^u = 0$), то значением формы de_u на X является вектор $de_u(X) = \omega_u^v(X)e_u = X_u^v e_u$, соответствующий *инфинитезимальному смещению* вектора e_u в направлении X. Каждому дифференцированию X из алгебры Ли $sl(n+1)$ соответствует *инфинитезимальное проективное преобразование*, переводящее проективный репер с вершинами $A_u = p(e_u)$ в репер с вершинами $A'_u = p(X_u^v e_u)$. В силу этого, систему равенств (1), в которой формы ω_u^v удовлетворяют уравнениям (2), (3), принято называть *уравнениями инфинитезимальных перемещений репера проективного пространства*, а уравнения (2), (3) – *структурными уравнениями проективного пространства* [2].

Пусть V – гладкая гиперповерхность в $P(W)$. Обозначим через $F(V)$ семейство реперов из $F(P(W))$, определенное следующим образом: $A_0 = p(e_0) \in V$, $A_n = p(e_n) \in V$, $A_i \in PT_{A_0}(V) \cap PT_{A_n}(V)$. Здесь и далее через $PT_A(V)$ обозначается *проективная касательная гиперплоскость* к гиперповерхности V в точке A. Семейство реперов $F(V)$ является гладким подмногообразием в $F(P(W))$. Обозначим через f отображение вложения $F(V) \to F(P(W))$, а через $\theta_u^v = f^*\omega_u^v$ – сужение форм ω_u^v на $F(V)$. Формы θ_u^v удовлетворяют уравнениям (2), (3) и уравнениям:

$$\theta_0^n = \theta_n^0 = 0. \tag{4}$$

Если рассмотреть гладкую проекцию

$$\pi\colon F(V) \to V \times V \setminus diag(V \times V), \tag{5}$$

сопоставляющую каждому базису $B = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \in F(V)$ пару точек A_0 и A_n гиперповерхности V, то многообразие $F(V)$ можно считать тотальным пространством для главного расслоения $\{F(V),\ V \times V \setminus diag(V \times V),\ \pi,\ G\}$ со структурной группой $G \subset PGL_0(n)$, являющейся подгруппой изотропии пары точек A_0, A_n. Горизонтальными формами расслоения (5) являются линейно независимые 1-формы $\{\theta_0^i,\ \theta_n^i\}$. Интегральными многообразиями вполне интегрируемой системы Пфаффа

$$\theta_0^i = \theta_n^i = 0 \tag{6}$$

являются подмногообразия реперов из $F(V)$, каждое из которых проектируется в фиксированную пару точек (A_0, A_n) гиперповерхности V.

Система форм $\{\theta_0^i,\ \theta_n^i\}$ содержит две вполне интегрируемых подсистемы:

$$\theta_0^i = 0, \tag{7}$$

$$\theta_n^i = 0. \tag{8}$$

Система (7) определяет семейство реперов из $F(V)$, проектирующихся в пару (A_0, A_n) с фиксированной точкой A_0. Аналогично, система (8) определяет семейство реперов с фиксированной точкой A_n. При этом, формы $\{\theta_0^i\}$ образуют базис кокасательного пространства к гиперповерхности *V* в точке A_0, а формы $\{\theta_n^i\}$ определяют аналогичный базис в точке A_n. Пусть $T_{A_0}(V)$ – касательное векторное пространство к гиперповерхности *V* в точке A_0, а $\{v_i\}$ – базис в $T_{A_0}(V)$, сопряженный кобазису $\{\theta_0^i\}$. Каждый вектор v_i можно отождествить с касательными векторами к проективной прямой A_0A_i в точке A_0 (см., например, [3]). Аналогично, если $\{\bar{v}_i\}$ – базис в $T_{A_n}(V)$, сопряженный кобазису $\{\theta_n^i\}$, то вектор $\bar{v}_i$ является касательным вектором к проективной прямой A_nA_i в точке A_n.

Применяя к системе (4) оператор внешнего дифференцирования и используя лемму Картана, получим:

$$\theta_i^n = a_{ij}\theta_0^j,\ a_{ij} = a_{ji}; \tag{9}$$

$$\theta_i^0 = \bar{a}_{ij}\theta_n^j,\ \bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}. \tag{10}$$

Повторяя указанную процедуру к системам уравнений (9) и (10), найдем:

$$da_{ij} - a_{kj}\theta_i^k - a_{ik}\theta_j^k + a_{ij}(\theta_0^0 + \theta_n^n) = \lambda_{ijk}\theta_0^k,\ \lambda_{ijk} = \lambda_{ikj}; \tag{11}$$

$$d\bar{a}_{ij} - \bar{a}_{kj}\theta_i^k - \bar{a}_{ik}\theta_j^k + \bar{a}_{ij}(\theta_0^0 + \theta_n^n) = \bar{\lambda}_{ijk}\theta_n^k,\ \bar{\lambda}_{ijk} = \bar{\lambda}_{ikj}. \tag{12}$$

Величины a_{ij} являются компонентами относительно инвариантного тензора в точке A_0, который называется *асимптотическим тензором* гиперповерхности *V*. Величины $\bar{a}_{ij}$ являются компонентами асимптотического тензора гиперповерхности *V* в точке A_n. В дальнейшем будем предполагать, что гиперповерхность *V* является *тангенциально невырожденной* [1], т.е. $\det(a_{ij}) \neq 0$ и $\det(\bar{a}_{ij}) \neq 0$.

Можно показать, что функции $A_{ij} = a_{ij} - \bar{a}_{ij}$ определяют относительно инвариантный тензор на $V \times V \setminus diagV \times V$. Легко видеть, что *равенство* $A_{ij} = 0$ *является необходимым и достаточным условием вырождения гиперповерхности V в гиперквадрику* (подробное доказательство см. в [1]). Действительно, если $a_{ij} = \bar{a}_{ij}$, то из (11), (12) следует (в силу линейной независимости форм θ_0^i, θ_n^i), что $\lambda_{ijk} = \bar{\lambda}_{ijk} = 0$. Поэтому в каждой точке A_0 гиперповерхности *V* равен нулю тензор Дарбу $b_{ijk} = \lambda_{ijk} - \frac{1}{n+1}\lambda_{(i}a_{jk)}$ (здесь $\lambda_i = \lambda_{ijk}a^{jk}$ и a^{jk} – обратный тензор для a_{ij}). Но условие $b_{ijk} = 0$ является тензорным признаком гиперквадрики [4]. Обратно, если *V* – невырожденная гиперквадрика, то в любом репере из $F(V)$ она может быть задана уравнением: $Q_{ij}x^ix^j - 2x^0x^n = 0$. Так как эту квадрику порождает относительно инвариантная квадратичная форма, заданная на векторном пространстве *W*, то по основной теореме тензорного анализа имеем:

$$dQ_{uv} - Q_{wv}\theta_u^w - Q_{uw}\theta_v^w + Q_{uv}\theta = 0, \tag{13}$$

где $Q_{00} = Q_{nn} = Q_{0i} = Q_{ni} = 0$, $Q_{0n} = -1$, а θ – некоторая 1-форма на $F(V)$. Раскрывая условие (13) для различных пар индексов, получим, что $Q_{ij} = a_{ij} = \bar{a}_{ij}$, т.е. $A_{ij} = 0$.

Далее будем рассматривать общий случай, когда тензор A_{ij} является невырожденным для любой пары точек A_0, A_n. Величины λ_{ijk} и $\bar{\lambda}_{ijk}$, входящие в уравнения (11), (12), не образуют тензоров, а являются геометрическими объектами на *V* [4]. Обозначим через $B_{ijk} = \lambda_{ijk} - \frac{3}{n+1} A_{(i}A_{jk)}$ и $\bar{B}_{ijk} = \bar{\lambda}_{ijk} - \frac{3}{n+1}\bar{A}_{(i}A_{jk)}$ бесследовые части объектов λ_{ijk} и $\bar{\lambda}_{ijk}$ относительно тензора A_{ij} соответственно. Здесь $A_i = A^{pq}\lambda_{pqi}$, $\bar{A}_i = A^{pq}\bar{\lambda}_{pqi}$ и A^{ij} – обратный тензор для A_{ij}. Кроме того, обозначим: $c_{ijk} = \frac{1}{B} B_{ijk}$, $\bar{c}_{ijk} = \frac{1}{\bar{B}}\bar{B}_{ijk}$, где $B = \sqrt{A^{lp}A^{qr}A^{st}B_{lqs}B_{prt}}$ и $\bar{B} = \sqrt{A^{lp}A^{qr}A^{st}\bar{B}_{lqs}\bar{B}_{prt}}$. Несложно проверить, что система функций $C_{ijk} = c_{ijk} - \bar{c}_{ijk}$ определяет на $V \times V \setminus (diagV \times V)$ относительно инвариантный трехвалентный симметрический тензор.

Теорема. *Тангенциально невырожденная гиперповерхность V с невырожденным тензором* A_{ij} *является кубической гиперповерхностью тогда и только тогда, когда в любом репере из* $F(V)$ *имеет место равенство* $C_{ijk} = 0$.

1. *Доказательство необходимости*. Пусть *V* – кубическая гиперповерхность в $P(W)$. В репере из $F(V)$ кубику *V* можно задать уравнением:

$$Q_{uvw}x^u x^v x^w = 0, \tag{14}$$

где $Q_{000} = Q_{00i} = Q_{inn} = Q_{nnn} = 0$, $Q_{00n}Q_{0nn} = 1$. Условие относительной инвариантности кубической формы $Q_{uvw}x^u x^v x^w$ на пространстве *W* имеет вид:

$$dQ_{uvw} - Q_{pvw}\theta_u^p - Q_{upw}\theta_v^p - Q_{uvp}\theta_w^p + Q_{uvw}\theta = 0, \tag{15}$$

где θ – некоторая 1-форма на $F(V)$. Введем обозначения: $Q_{00n} = Q$, $Q_{0nn} = \bar{Q}$, $Q_{0in} = Q_i$, $Q_{0ij} = Q_{ij}$, $Q_{nij} = \bar{Q}_{ij}$. Тогда система (15) перепишется в виде:

$$-2Q_{ij}\theta_0^j - Q\theta_i^n = 0, \; -2\bar{Q}_{ij}\theta_n^j - \bar{Q}\theta_i^0 = 0, \tag{16}$$

$$dQ - Q(2\theta_0^0 + \theta_n^n - \theta) - 2Q_i\theta_0^i = 0, \; d\bar{Q} - \bar{Q}(2\theta_n^n + \theta_0^0 - \theta) - 2Q_i\theta_n^i = 0, \tag{17}$$

$$dQ_{ij} - Q_{kj}\theta_i^k - Q_{ik}\theta_j^k + Q_{ij}(\theta - \theta_0^0) - Q_i\theta_j^n - Q_j\theta_i^n - Q_{kij}\theta_0^k = 0, \tag{18}$$

$$d\bar{Q}_{ij} - \bar{Q}_{kj}\theta_i^k - \bar{Q}_{ik}\theta_j^k + \bar{Q}_{ij}(\theta - \theta_n^n) - Q_i\theta_j^0 - Q_j\theta_i^0 - Q_{kij}\theta_n^k = 0, \tag{19}$$

$$dQ_i - Q_j\theta_i^j - Q_i(\theta_0^0 + \theta_n^n - \theta) - \bar{Q}_{ji}\theta_0^j - Q_{ij}\theta_n^j - Q\theta_i^0 - \bar{Q}\theta_i^n = 0, \tag{20}$$

$$dQ_{ijk} = Q_{ljk}\theta_i^l + Q_{ilk}\theta_j^l + Q_{ijl}\theta_k^l - Q_{ljk}\theta + 3Q_{(jk}\theta_{i)}^0 + 3\bar{Q}_{(jk}\theta_{i)}^n. \tag{21}$$

Дифференцируя тождество

$$Q\bar{Q} = 1, \tag{22}$$

получим:

$$\theta = \frac{3}{2}(\theta_0^0 + \theta_n^n) + \overline{Q} Q_i \theta_0^i + Q Q_i \theta_n^i . \tag{23}$$

Из (9), (10) и (16) найдем:

$$a_{ij} = -2\overline{Q} Q_{ij} , \; \overline{a}_{ij} = -2Q\overline{Q}_{ij} . \tag{24}$$

Дифференцируя равенства (24), получим:

$$\lambda_{ijk} = -2\overline{Q}(3a_{(ij}Q_{k)} + Q_{kij}) , \; \overline{\lambda}_{ijk} = -2Q(3\overline{a}_{(ij}Q_{k)} + Q_{kij}) .$$

Исключая из последних соотношений величины Q_{ijk}, найдем:

$$Q\lambda_{ijk} - \overline{Q}\,\overline{\lambda}_{ijk} = 6A_{(ij}Q_{k)} . \tag{25}$$

Свернув равенство (25) с тензором A^{ij}, получим выражение для коэффициентов Q_k:

$$Q_k = \frac{1}{2(n+1)}(QA_k - \overline{Q}\,\overline{A}_k) . \tag{26}$$

Равенство (25) перепишется в виде: $Q(\lambda_{ijk} - \frac{3}{n+1}A_{ij}A_{k)}) = \overline{Q}(\overline{\lambda}_{ijk} - \frac{3}{n+1}A_{ij}\overline{A}_{k)})$, т.е.

$$QB_{ijk} = \overline{Q}\,\overline{B}_{ijk} . \tag{27}$$

Умножим равенство (27) на тензор B_{pqr} и свернем результат с $A^{ip}A^{jq}A^{kr}$:

$$QA^{ip}A^{jq}A^{kr}B_{ijk}B_{pqr} = \overline{Q}A^{ip}A^{jq}A^{kr}\overline{B}_{ijk}B_{pqr} . \tag{28}$$

Аналогично, умножив (27) на $\overline{B}_{pqr}$ и свернув результат с $A^{ip}A^{jq}A^{kr}$, найдем:

$$QA^{ip}A^{jq}A^{kr}B_{ijk}\overline{B}_{pqr} = \overline{Q}A^{ip}A^{jq}A^{kr}\overline{B}_{ijk}\overline{B}_{pqr} . \tag{29}$$

Из равенств (28), (29) получим:

$$Q^2B^2 = \overline{B}^2\overline{Q}^2 , \tag{30}$$

Используя условие (22), из пропорции (30) находим: $Q = \sqrt{\frac{\overline{B}}{B}}$, $\overline{Q} = \sqrt{\frac{B}{\overline{B}}}$. Теперь равенство (27) примет вид: $\frac{\sqrt{\overline{B}}}{\sqrt{B}}B_{ijk} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\overline{B}}}\overline{B}_{ijk}$. Следовательно, $\frac{1}{B}B_{ijk} = \frac{1}{\overline{B}}\overline{B}_{ijk}$, т.е. $c_{ijk} = \overline{c}_{ijk}$. Итак, $C_{ijk} = 0$. Необходимость доказана.

2. *Доказательство достаточности*. Пусть V – тангенциально невырожденная гиперповерхность в $P(W)$, для которой тензор C_{ijk} тождественно равен нулю в любом репере из $F(V)$. Для гиперповерхности V выполняется система дифференциальных уравнений (4), (9)–(12). Для каждой пары точек A_0, A_n гиперповерхности V определим кубическую гиперповерхность $\overline{V}(A_0, A_n)$, которая задается уравнением (14), имеющим следующие коэффициенты:

$$Q_{000} = Q_{00i} = Q_{inn} = Q_{nnn} = 0 , \; Q_{00n} = Q = \sqrt{\frac{\overline{B}}{B}} , \; Q_{0nn} = \overline{Q} = \sqrt{\frac{B}{\overline{B}}} ,$$

$$Q_{0ij} = -\frac{Q}{2}a_{ij} , \; Q_{nij} = -\frac{\overline{Q}}{2}\overline{a}_{ij} , \; Q_{0in} = Q_i = \frac{1}{2(n+1)}(Q \cdot A_i - \overline{Q} \cdot \overline{A}_i) ,$$

$$Q_{kij}=-\frac{Q}{2}\lambda_{ijk}-3a_{(ij}Q_{k)}\equiv-\frac{\overline{Q}}{2}\overline{\lambda}_{ijk}-3\overline{a}_{(ij}Q_{k)}\,.$$

Используя дифференциальные следствия уравнения $C_{ijk}=0$ и учитывая (9)–(14), можно проверить, что для кубики $\overline{V}(A_0,A_n)$ будет выполняться условие ее инвариантности (15). Итак, кубическая гиперповерхность $\overline{V}(A_0,A_n)$ остается постоянной для любой пары точек A_0 и A_n. Но так как кубика $\overline{V}(A_0,A_n)$ проходит через точки A_0 и A_n, то все точки гиперповерхности V принадлежат этой кубике. Теорема доказана.

Замечание. Пусть U и V – пара гиперповерхностей в $P(W)$. Рассмотрим вместо многообразия реперов $F(V)$ многообразие $F(U,V)\subset F(P(W))$, определяемое условиями: $A_0=p(e_0)\in U$, $A_n=p(e_n)\in V$, $A_i\in PT_{A_0}(U)\cap PT_{A_n}(V)$. Тогда $\{\theta_0^i,\ \theta_n^i\}$ – горизонтальные формы для расслоения $\pi\colon F(U,V)\to U\times V$; $\{\theta_0^i\}$ – линейно независимые базовые формы на U; $\{\theta_n^i\}$ – линейно независимые базовые формы на V; $\{a_{ij}\}$ – асимптотический тензор гиперповерхности U; $\{\overline{a}_{ij}\}$ – асимптотический тензор гиперповерхности V; $\{A_{ij}\}$ и $\{C_{ijk}\}$ – тензоры на $U\times V$. *Равенство $A_{ij}\equiv 0$ является необходимым и достаточным условием того, что гиперповерхности U и V принадлежат одной гиперквадрике, а равенство $C_{ijk}\equiv 0$ эквивалентно тому, что гиперповерхности U и V принадлежат одной гиперкубике.* Если V_1, V_2, …, V_p – конечная система гиперповерхностей, то, разбивая гиперповерхности на пары, найденный критерий может быть применен при доказательстве принадлежности всех этих гиперповерхностей одной гиперкубике.

Отметим, что найденный признак кубических гиперповерхностей отличается от *обобщенной теоремы Абеля*, доказанной М.А.Акивисом в работе [1]. Применение обобщенной теоремы Абеля в рассматриваемом случае потребовало бы анализа локальных характеристик гиперповерхности для каждого набора из трех ее точек, лежащих на одной прямой.

Библиографический список

1. *Акивис М.А.* О некоторых задачах алгебраизуемости в проективно-дифференциальной геометрии // Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С.3-14.

2. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective Differential Geometry of Submanifolds. North-Holland. 1993. 362 p.

3. *Griffith Ph., Harris J.* Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. scient. Ec. Sup., 4 serie. 1979. № 12. P.355-452.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // ТММО. 1953. Т.2. С.275-382.

5. Коннов В.В. Дифференциальная геометрия некоторых классов алгебраических многообразий. Самара: Изд-во СамГПУ, 1998. 108 с.

V.V. K o n n o v

THE CRITERION of CUBIC HYPERSURFACES

The *algebraization problem* for a smooth submanifold in a projective space is to find a differential-geometric criterion at which the given submanifold in a projective space becomes some algebraic variety (or some submanifolds in a projective space belong to one algebraic variety). In this work the differential-geometric criterion of cubic hypersurfaces has been found. For a smooth hypersurface V in a projective space P^n the manifold $V \times V \setminus diag(V \times V)$ of pairs of its various points is considered. The three-valence covariant symmetrical tensor C_{ijk} on the manifold $V \times V \setminus diag(V \times V)$ is constructed. The equality to zero of the tensor C_{ijk} is the criterion of cubic hypersurfaces. The found criterion can be applied when it is necessary to prove that two or more hypersurfaces belong to one cubic hypersurface. This criterion contains only derivatives not exceeding the third order and he can be easily applied in practice.

УДК 514.75

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

И.Е. Л и с и ц ы н а

(Балтийский военно-морской институт)

Дано задание регулярной гиперполосы SH_m, базисная поверхность которой несет сопряженную пару $S(\Delta,\Delta^*)$ распределений: распределение Δ r-мерных линейных элементов и распределение Δ^* s-мерных линейных элементов (s=m-r). Рассмотрены аналитические условия и геометрическая интерпретация голономности распределений. С помощью фокальных образов, ассоциированных с распределениями Δ и Δ^*, найдено поле инвариантных нормалей 2-го рода гиперполосы SH_m, которое названо полем ребер Грина. Построено поле нормалей Фосса 1-го рода гиперполосы $SH_m \subset A_n$, которое сопряжено относительно поля соприкасающихся гиперквадрик гиперполосы SH_m полю ребер Грина.

В работе придерживаемся следующей схемы индексов: $p,q,t,...=\overline{1,r}$; $a,b,c,...=\overline{r+1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma,...=\overline{m+1,n-1}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\ldots=\overline{m+1,n}$; $i,j,k,...=\overline{1,m}$; $A,B,C,...=\overline{1,r},\ \overline{m+1,n-1}$; $u,v,w,...=\overline{r+1,n-1}$; $Y,J,K,...=\overline{1,n}$.