УДК 514.76

Ю.И. Шевченко
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
eskrydlova@kantiana.ru

Фактор-многообразия, порожденные голономными распределениями на гладких многообразиях

На гладком многообразии рассмотрено голономное распределение, которое порождает фактор-многообразие. С помощью структурных уравнений Лаптева и деривационных формул Акивиса определены голономное, полуголономное, внутренне и внешне неголономные гладкие многообразия. Доказано, что фактор-многообразие полуголономного многообразия является внутренне и внешне неголономным, а фактор-многообразие голономного многообразия голономно.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, деривационные формулы Акивиса, голономное распределение, фактор-многообразие, неголономное гладкое многообразие.

1. Уравнения Лаптева и формулы Акивиса

Для n-мерного гладкого многообразия M_n и расслоений кореперов над ним Лаптев [1] получил следующие структурные уравнения:

$$\begin{aligned} &d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\, d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I \ (I,... = \overline{1,n}), \\ &d\omega_{JK}^I = \omega_{JK}^L \wedge \omega_L^I - \omega_{LK}^I \wedge \omega_J^L - \omega_{JL}^I \wedge \omega_K^L + \omega^L \wedge \omega_{JKL}^I, ... \end{aligned} \tag{1}$$

где $\omega^I, \omega_J^I, \omega_{JK}^I, ...$ — линейные дифференциальные формы. Уравнения (1_2) получены в результате продолжения квадратичных уравнений (1_1), то есть при их внешнем дифференцировании с последующим разрешением по лемме Лаптева [1], причем возникают условия

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0 \Leftrightarrow \omega^I_{[JK]} = \lambda^I_{JKL}\omega^L, \quad \lambda^I_{(JK)L} = 0, \quad \lambda^I_{\{JKL\}} = 0, \tag{2}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, фигурные скобки — циклирование.

Аналогичные условия выполняются для форм высших порядков, в частности,

$$\omega^I_{J[KL]} = \lambda^I_{JKLM}\omega^M. \tag{3}$$

Многообразие, для которого выполняются условия (2, 3) и аналогичные высших порядков, назовем [2] полуголономным гладким многообразием M^S_n соответствующего порядка. Если условия локальной симметрии форм $\omega^I_{JK}, \omega^I_{JKL}, \ldots$ по двум последним нижним индексам вырождаются в условия симметрии: $\omega^I_{[JK]} = 0, \omega^I_{J[KL]} = 0, \ldots$ то будем говорить [3] о голономном гладком многообразии M^H_n.

Деривационные формулы Акивиса [4] для n-мерного гладкого многообразия M_n запишем в виде

$$\overline{dx} = \omega^I \overline{e}_I, \ \ d\overline{e}_I = \omega^J_I \overline{e}_J + \omega^J \overline{e}_{IJ}, \quad d\overline{e}_{IJ} = \omega^K_{IJ}\overline{e}_K + \omega^K_I \overline{e}_{KJ} + \omega^K_J \overline{e}_{IK} + \omega^K \overline{e}_{IJK}, \ldots \tag{4}$$

где использовано обозначение Лаптева $\overline{dx}$ — бесконечно малое смещение точки x по многообразию с точностью до 1-го порядка; $\overline{e}_I$ — базисные векторы n-мерного линейного пространства T_n, касательного к многообразию M_n в точке x. Формула (4_2) получена в результате продолжения пфаффового уравнения (4_1), то есть при его внешнем дифференцировании с помощью структурных уравнений (1_1) в предположении

$d\overline{dx} = 0$ и последующем разрешении по лемме Картана. Аналогично формула (4_3) является продолжением формулы (4_2), поэтому выполняются условия

$$\overline{e}_{[IJ]} = 0, \overline{e}_{I[JK]} = 0, ... \tag{5}$$

Касательные векторы 2-го порядка $\overline{e}_{IJ}$ дополняют векторы $\overline{e}_I$ до базиса соприкасающегося пространства $\overset{2}{T} \supset T_n$ причем

$$\dim \overset{2}{T} = n + C_{n+1}^2 = \frac{n}{2}(n+3).$$

Касательные векторы 3-го порядка $\overline{e}_{IJK}$ дополняют векторы 1-го и 2-го порядков $\overline{e}_I$, $\overline{e}_{IJ}$ до базиса касательного пространства 3-го порядка $\overset{3}{T} \supset \overset{2}{T}$.

2. Касательные пространства 3-го порядка

Проальтернируем формулу (4_3) с учетом симметрии (5_1):

$$\omega_{[IJ]}^K \overline{e}_K + \omega^K \overline{e}_{[IJ]K} = \overline{0}, \tag{6}$$

Если $\overline{e}_{[IJ]K} \notin T_n$, то равенства (6) разбиваются на две серии

$$\omega_{[IJ]}^K \overline{e}_K = \overline{0}, \ \omega^K \overline{e}_{[IJ]K} = \overline{0},$$

из которых получим

$$\omega_{[IJ]}^K = 0, \ \overline{e}_{[IJ]K} = \overline{0}, \tag{7}$$

что соответствует голономному гладкому многообразию M_n^H . Равенства (5_2, 7_2) дают симметрию векторов 3-го порядка $\overline{e}_{IJK}$ по всем индексам.

Найдем число симметричных векторов $\overline{e}_{IJK}$. Число векторов с различными сочетаниями индексов (например, $\overline{e}_{123}$) равно C_n^3. Векторов, у которых два индекса принимают равные значения, отличные от третьего индекса (например, $\overline{e}_{112}, \overline{e}_{122}$), всего $2C_n^2$. Число векторов с одинаковыми значениями трех индексов (например, $\overline{e}_{111}$) равно n. Общее число различных векторов $\overline{e}_{IJK}$ есть сумма

$$C_n^3 + 2C_n^2 + n = \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2). \qquad (8)$$

Утверждение 1.*Размерность касательных пространств 3-го порядка $\overset{3}{T}{}^H$ к голономному гладкому многообразию M_n^H общего вида находится по формуле* [3]:

$$\dim \overset{3}{T}{}^H = \dim \overset{2}{T}{}^H + \frac{n}{6}(n^2 + 3n + 2) = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11).$$

Количество независимых векторов $\overline{e}_{IJK}$ для полуголономного гладкого многообразия M_n^S подсчитаем следующим образом. Подставим условия локальной симметрии (2_2) в уравнения (6):

$$\omega^K(\lambda_{IJK}^L \overline{e}_L + \overline{e}_{[IJ]K}) = \overline{0}.$$

откуда в силу линейной независимости базисных форм ω^K

$$\overline{e}_{[IJ]K} = -\lambda_{IJK}^L \overline{e}_L. \qquad (9)$$

В полуголономном случае равенства (5) имеют место, а вместо равенств (7_2) выполняются более общие условия (9). Значит, число линейно независимых векторов $\overline{e}_{IJK}$ в касательном пространстве 3-го порядка равно числу (8).

Утверждение 2. *Размерность касательных пространств 3-го порядка $\overset{3}{T}{}^S$ к полуголономному гладкому многообразию M_n^S совпадает с размерностью пространств $\overset{3}{T}{}^H$:*

$$\dim \overset{3}{T}{}^S = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11).$$

Теорема 1. *Структурные уравнения Лаптева (1) для полуголономного гладкого многообразия* M_n^S *соответствуют деривационным формулам Акивиса (4), в которых касательные векторы 2-го порядка* $\bar{e}_{IJ}$ *симметричные* (5_1), *векторы 3-го порядка* $\bar{e}_{IJK}$ *удовлетворяют условиям* (5_2, 9), *и выполняются аналогичные условия для векторов высших порядков. Голономному гладкому многообразию* M_n^H *соответствуют касательные векторы высших порядков* $\bar{e}_{IJ}$, $\bar{e}_{IJK}, \ldots,$ *симметричные по всем индексам.*

3. Неголономные гладкие многообразия

Рассмотрим гладкое многообразие со структурными уравнениями (1) и деривационными формулами (4) в предположении, что они получаются не в результате продолжений уравнений (1_1, 4_1), а берутся в качестве исходных уравнений. Тогда не возникнет условий (2, 3, 5, 7, 9) и аналогичных им для высших порядков, то есть формы $\omega^I_{JK}, \omega^I_{JKL}, \ldots$ не будут обладать даже локальной симметрией, а все векторы $\bar{e}_{IJ}$, $\bar{e}_{IJK}, \ldots,$ станут линейно независимыми. В этом случае будем говорить о внутренне неголономном гладком многообразии M_n^N. Если вместо структурных уравнений (1_2, 1_3,...) имеют место более общие уравнения, например:

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK} + \Theta^I_J,\ \Theta^I_J \neq \omega^K \wedge \theta^I_{JK},$$

то будем говорить о внешне неголономном гладком многообразии ${}^N M_n$. Мы покажем, что существуют такие многообразия ${}^N M_n$, которые являются внутренне неголономными многообразиями ${}^N M_n^N$.

Утверждение 3. *Размерности касательных пространств 2-го и 3-го порядков к неголономными гладким многообразиям находятся по формулам* [3]:

$$\dim \overset{2}{T} = n(n+1), \ \dim \overset{3}{T} = n(1+n+n^2).$$

4. Распределение на многообразии

Рассмотрим распределение $T_m(M_n)$ m-мерных подпространств $T_m \subset T_n$ на гладком многообразии M_n, которое является полуголономным многообразием M_n^S, в частности, голономным многообразием M_n^H. Произведем разбиение значений индексов:

$$I = (i, \alpha); \ i, ... = \overline{1, m}; \ \alpha, ... = \overline{m+1, n}.$$

Поместим векторы $\overline{e}_i$ в подпространство T_m и запишем их деривационные формулы

$$d\overline{e}_i = \omega_i^j \overline{e}_j + \omega_i^\alpha \overline{e}_\alpha + \omega^J \overline{e}_{iJ},$$

откуда следует

$$\delta \overline{e}_i = \pi_i^j \overline{e}_j; \ \pi = \omega\big|_{\omega_i^\alpha = 0, \, \omega^J = 0}; \ \delta = d\big|_{\omega_i^\alpha = 0, \, \omega^J = 0}.$$

Поскольку эти формулы показывают инвариантность совокупности векторов $\overline{e}_i$, на которые натянуто подпространство $T_m = [\overline{e}_i]$ касательного пространства T_n к многообразию-M_n в точке *x*, уравнения распределения $T_m(M_n)$ имеют вид

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J. \tag{10}$$

Продолжим пфаффовы уравнения (10):

$$\Delta \Lambda_{iJ}^\alpha + \omega_{iJ}^\alpha = \Lambda_{iJK}^\alpha \omega^K, \quad \Lambda_{i[JK]}^\alpha = 0, \tag{11}$$

где тензорный дифференциальный оператор действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{iJ} = d\Lambda^{\alpha}_{iJ} + \Lambda^{\beta}_{iJ}\omega^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{jJ}\omega^{j}_{i} - \Lambda^{\alpha}_{iK}\omega^{K}_{J}.$$

Запишем дифференциальные уравнения (11) подробнее и используем уравнения (10):

$$\begin{aligned} &\Delta\Lambda^{\alpha}_{ij} + \omega^{\alpha}_{ij} = (\Lambda^{\alpha}_{ijK} + \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\Lambda^{\beta}_{jK})\omega^{K}, \\ &\Delta\Lambda^{\alpha}_{i\beta} - \Lambda^{\alpha}_{ij}\omega^{j}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{i\beta} = \Lambda^{\alpha}_{i\beta K}\omega^{K}. \end{aligned} \tag{12}$$

Утверждение 4. Фундаментальный объект Λ^{α}_{iJ} распределения $T_m(M_n)$ имеет подобъект Λ^{α}_{ij} .

5. Голономное распределение

Проальтернируем дифференциальные уравнения (12_1) фундаментального подобъекта Λ^{α}_{ij} и используем выражения (2_1):

$$\Delta\Lambda^{\alpha}_{[ij]} = (\Lambda^{\alpha}_{[ij]K} + \Lambda^{\alpha}_{[i\beta}\Lambda^{\beta}_{j]K} - \lambda^{\alpha}_{ijK})\omega^{K}, \tag{13}$$

где альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Получили дифференциальные уравнения для компонент тензора неголономности $N^{\alpha}_{ij} = \Lambda^{\alpha}_{[ij]}$ (см. [5]) распределения $T_m(M_n)$.

К тензору неголономности N^{α}_{ij} можно прийти при преобразовании структурных уравнений (1_1) базисных форм ω^{I} распределения $T_m(M_n)$, которые запишем подробнее:

$$d\omega^{i} = \omega^{j}\wedge\omega^{i}_{j} + \omega^{\alpha}\wedge\omega^{i}_{\alpha},\ d\omega^{\alpha} = \omega^{i}\wedge\omega^{\alpha}_{i} + \omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}. \tag{14}$$

Подставляя пфаффовы уравнения (10) распределения $T_m(M_n)$ в структурные уравнения (14_2), получим:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\beta}\wedge(\omega^{\alpha}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{i}) + N^{\alpha}_{ij}\omega^{i}\wedge\omega^{j}. \tag{15}$$

При аннулировании тензора неголономности $N^{\alpha}_{ij}=0$ распределение $T_m(M_n)$ называется голономным, а уравнения (15) принимают вид

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\Omega^{\alpha}_{\beta},\quad \Omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\alpha}_{\beta}-\Lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{i}\,. \qquad (16)$$

В этом случае система $\omega^{\alpha}=0$ вполне интегрируема. Она выделяет m-мерное подмногообразие $M_m\subset M_n$, причем ограничение распределения $T_m(M_n)$ на подмногообразие M_m является касательным расслоением $T_m(M_m)$. Структурные уравнения подмногообразия M_m дают уравнения (14_1):

$$d\omega^{i}=\omega^{j}\wedge\tilde{\omega}^{i}_{j},\ \ \tilde{\omega}^{i}_{j}=\omega^{i}_{j}\Big|_{\omega^{\alpha}=0}.$$

Подмногообразие M_m является типовым слоем расслоения $M_n=M_m(F_{n-m})$ со структурными уравнениями (14_1, 16_1), базой которого служит $(n-m)$-мерное фактор-многообразие F_{n-m} — множество m-мерных подмногообразий, огибаемых подпространствами голономного распределения $T_m(M_m(F_{n-m}))$.

6. Неголономность фактор-многообразия

Исследуем гладкое многообразие F_{n-m} со структурными уравнениями (16_1). Найдем внешние дифференциалы форм (16_2) с помощью структурных уравнений (1_2, 14_1):

$$d\Omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+\omega^{\gamma}\wedge(\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Lambda^{\alpha}_{i\beta}\omega^{i}_{\gamma}-\Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\omega^{i}_{\beta})+$$
$$+\omega^{i}\wedge(d\Lambda^{\alpha}_{i\beta}-\Lambda^{\alpha}_{j\beta}\omega^{j}_{i}-\Lambda^{\alpha}_{ji}\omega^{j}_{\beta}+\omega^{\alpha}_{\beta i}).$$

Учтем симметрию компонент фундаментального подобъекта Λ^{α}_{ij} голономного распределения $T_m(M_m(F_{n-m}))$ и используем дифференциальные уравнения (12_2):

$$d\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge (\omega_{\beta\gamma}^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_\gamma^i - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^i - \Lambda_{i\beta\gamma}^\alpha \omega^i) +$$
$$+ \omega^i \wedge (\omega_{\beta i}^\alpha - \omega_{i\beta}^\alpha + \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma - \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha + \Lambda_{i\beta j}^\alpha \omega^j).$$

Преобразуем 1-ое слагаемое с помощью обозначения (16_2):

$$\omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^i \wedge (\Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma) - \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega^i \wedge \Lambda_{j\gamma}^\alpha \omega^j.$$

Подставим эти выражения в предыдущие уравнения

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge (\omega_{\beta\gamma}^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_\gamma^i - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^i - \Lambda_{i\beta\gamma}^\alpha \omega^i) +$$
$$+ 2\omega^i \wedge \omega_{[\beta i]}^\alpha + (\Lambda_{i\beta j}^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\gamma \Lambda_{j\gamma}^\alpha)\omega^i \wedge \omega^j.$$

Воспользуемся уравнениями (2_2)

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha +$$
$$+(\Lambda_{[i\beta j]}^\alpha - \Lambda_{[i\beta}^\gamma \Lambda_{j]\gamma}^\alpha + 2\lambda_{\beta[ij]}^\alpha)\omega^i \wedge \omega^j, \tag{17}$$

$$\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = \omega_{\beta\gamma}^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_\gamma^i - \Lambda_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^i - \Lambda_{i\beta\gamma}^\alpha \omega^i - 2\lambda_{\beta i\gamma}^\alpha \omega^i. \tag{18}$$

Преобразуем последнее слагаемое в структурных уравнениях (17). Для голономного распределения $T_m(M_m(F_{n-m}))$ из уравнений (13) следует

$$\Lambda_{[ij]K}^\alpha + \Lambda_{[i\beta}^\alpha \Lambda_{j]K}^\beta - \lambda_{ijK}^\alpha = 0.$$

Если $K = \beta$, то

$$\Lambda_{[ij]\beta}^\alpha + \Lambda_{[i\gamma}^\alpha \Lambda_{j]\beta}^\gamma - \lambda_{ij\beta}^\alpha = 0. \tag{19}$$

Условие симметрии (11_2) при $J = j,\ K = \beta$ дает

$$\Lambda_{ij\beta}^\alpha = \Lambda_{i\beta j}^\alpha \Rightarrow \Lambda_{[ij]\beta}^\alpha = \Lambda_{[i\beta j]}^\alpha,$$

поэтому равенства (19) принимают вид

$$\Lambda_{[i\beta j]}^\alpha - \Lambda_{[j\gamma}^\alpha \Lambda_{i]\beta}^\gamma = \lambda_{ij\beta}^\alpha.$$

Подставим их в структурные уравнения (17):

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + N_{\beta ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j,$$
$$N_{\beta ij}^\alpha = \lambda_{ij\beta}^\alpha + 2\lambda_{\beta[ij]}^\alpha. \tag{20}$$

Назовем $N^{\alpha}_{\beta ij}$ объектом внешней неголономности фактор-многообразия F_{n-m}.

Проальтернируем формы (18) по нижним индексам с учетом условия симметрии (11_2):

$$\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} - 2\lambda^{\alpha}_{[\beta i\gamma]}\omega^{i}.$$

С помощью условия локальной симметрии (2_2) получим

$$\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} + (\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma i} - 2\lambda^{\alpha}_{[\beta i\gamma]})\omega^{i}.$$

Наконец, используем условие антисимметрии (2_3):

$$\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta} + N^{\alpha}_{\beta\gamma i}\omega^{i},\ \ N^{\alpha}_{\beta\gamma i} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma i} + 2\lambda^{\alpha}_{i[\beta\gamma]}. \qquad (21)$$

Назовем $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ объектом внутренней неголономности фактор-многообразия F_{n-m}.

Теорема 2. *Фактор-многообразие F_{n-m}, порожденное голономным распределением на полуголономном гладком многообразии $M^{S}_{n} = M_{m}(F_{n-m})$, является внешне и внутренне неголономным гладким многообразием ${}^{N}F^{N}_{n-m}$.*

7. О полуголономности и голономности фактор-многообразия

Если объект внешней неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$ обратится в нуль:

$$N^{\alpha}_{\beta ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{\alpha}_{ij\beta} = -2\lambda^{\alpha}_{\beta[ij]}, \qquad (22)$$

то структурные уравнения (20_1) упростятся

$$d\Omega^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\Omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma}\wedge\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Если аннулируется объект внутренней неголономности $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$:

$$N^{\alpha}_{\beta\gamma i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma i} = -2\lambda^{\alpha}_{i[\beta\gamma]}, \tag{23}$$

то выражения (21_1) примут вид

$$\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}, \tag{24}$$

причем условия (2_3, 2_4) дадут $\lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)\delta} = 0$, $\lambda^{\alpha}_{\{\beta\gamma\delta\}} = 0$. В случае, когда $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$ условие локальной симметрии (24) станет условием симметрии: $\Omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0$.

Теорема 3. *Если объекты внешней и внутренней неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ обратятся в нуль, то фактор-многообразие F_{n-m} станет полуголономным гладким многообразием F^{S}_{n-m} (1-го порядка). Если к тому же условие локальной симметрии форм $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ выродится в условие симметрии, то полуголономное фактор-многообразие F^{S}_{n-m} превратится в голономное гладкое многообразие F^{H}_{n-m}.*

Объекты неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ фактор-многообразия F_{n-m} выражаются по формулам (20_2, 21_2) через коэффициенты λ^{α}_{JKL}. В выражениях (24) стоят коэффициенты $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$. Значит, в случае голономного гладкого многообразия M^{H}_{n}, когда $\lambda^{I}_{JKL} = 0$, справедлива

Теорема 4. *Фактор-многообразие F_{n-m}, порожденное голономным распределением $T_m(M_m(F_{n-m}))$ на голономном гладком многообразии $M^{H}_{n} = M_m(F_{n-m})$, является голономным гладким многообразием F^{H}_{n-m}.*

8. О тензорности объектов неголономности

Найдем дифференциальные сравнения для компонент объектов внешней и внутренней неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ с целью установления возможности условий (22, 23). Для этого нужно продолжить пфаффовы уравнения (2_2), в которые входят формы $\omega^I_{[JK]}$. Их внешние дифференциалы получаются при альтернировании структурных уравнений (1_3):

$$d\omega^I_{[JK]} = \omega^L_{[JK]} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{L[K} \wedge \omega^L_{J]} - \omega^I_{[JL} \wedge \omega^L_{K]} + \omega^L \wedge \omega^I_{[JK]L}.$$

Во 2-ом и 3-ем слагаемых раскроем альтернирования и произведем перегруппировку

$$\begin{gathered} d\omega^I_{[JK]} = \omega^L_{[JK]} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{[LK]} \wedge \omega^L_J - \\ - \omega^I_{[JL]} \wedge \omega^L_K + \omega^L \wedge \omega^I_{[JK]L}. \end{gathered} \tag{25}$$

Продифференцируем уравнения (2_2) с помощью структурных уравнений (1_1, 25):

$$(\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L}) \wedge \omega^L = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана и запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм

$$\Delta\lambda^I_{JKL} + \omega^I_{[JK]L} \cong 0 \ \ (\mathrm{mod}\ \omega^I).$$

Запишем эти сравнения подробнее для величин $\lambda^{\alpha}_{ij\beta}, \lambda^{\alpha}_{\beta ij}$, $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma i}, \lambda^{\alpha}_{i\beta\gamma}$, формирующих тензоры неголономости $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$, и учтем уравнения распределения (10):

$$\begin{aligned} &\Delta\lambda^{\alpha}_{ij\beta} - \lambda^{\alpha}_{ijk}\omega^k_{\beta} + \omega^{\alpha}_{[ij]\beta} \cong 0, \\ &\Delta\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma i} - \lambda^{\alpha}_{j\gamma i}\omega^j_{\beta} - \lambda^{\alpha}_{\beta ji}\omega^j_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]i} \cong 0, \\ &\Delta\lambda^{\alpha}_{\beta ij} - \lambda^{\alpha}_{kij}\omega^k_{\beta} + \omega^{\alpha}_{[\beta i]j} \cong 0, \\ &\Delta\lambda^{\alpha}_{i\beta\gamma} - \lambda^{\alpha}_{ij\gamma}\omega^j_{\beta} - \lambda^{\alpha}_{i\beta j}\omega^j_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{[i\beta]\gamma} \cong 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Проальтернируем дифференциальные сравнения (26_3, 26_4) по нижним индексам одной серии

$$\Delta\lambda^{\alpha}_{\beta[ij]} - \lambda^{\alpha}_{k[ij]}\omega^{k}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{[\beta[i]j]} \cong 0,$$
$$\Delta\lambda^{\alpha}_{i[\beta\gamma]} - \lambda^{\alpha}_{ij[\gamma}\omega^{j}_{\beta]} - \lambda^{\alpha}_{i[\beta j}\omega^{j}_{\gamma]} + \omega^{\alpha}_{[i[\beta]\gamma]} \cong 0.$$

Согласно условиям (3) последние слагаемые сравнимы с нулем, поэтому

$$\Delta\lambda^{\alpha}_{\beta[ij]} - \lambda^{\alpha}_{k[ij]}\omega^{k}_{\beta} \cong 0, \quad \Delta\lambda^{\alpha}_{i[\beta\gamma]} - \lambda^{\alpha}_{ij[\gamma}\omega^{j}_{\beta]} - \lambda^{\alpha}_{i[\beta j}\omega^{j}_{\gamma]} \cong 0. \qquad (27)$$

С помощью дифференциальных сравнений (26_1, 26_2, 27) найдем сравнения для компонент объектов неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$:

$$\Delta N^{\alpha}_{\beta ij} - \lambda^{\alpha}_{ijk}\omega^{k}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{[ij]\beta} - 2\lambda^{\alpha}_{k[ij]}\omega^{k}_{\beta} \cong 0,$$
$$\Delta N^{\alpha}_{\beta\gamma i} - \lambda^{\alpha}_{j\gamma i}\omega^{j}_{\beta} - \lambda^{\alpha}_{\beta ji}\omega^{j}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]i} - 2\lambda^{\alpha}_{ij[\gamma}\omega^{j}_{\beta]} - 2\lambda^{\alpha}_{i\beta[j}\omega^{j}_{\gamma]} \cong 0.$$

Раскроем альтернирования в слагаемых, содержащих множитель 2, и приведем подобные члены:

$$\Delta N^{\alpha}_{\beta ij} - (\lambda^{\alpha}_{ijk} + \lambda^{\alpha}_{kij} - \lambda^{\alpha}_{kji})\omega^{k}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{[ij]\beta} \cong 0,$$
$$\Delta N^{\alpha}_{\beta\gamma i} - (\lambda^{\alpha}_{j\gamma i} + \lambda^{\alpha}_{ij\gamma} - \lambda^{\alpha}_{i\gamma j})\omega^{j}_{\beta} - (\lambda^{\alpha}_{\beta ji} - \lambda^{\alpha}_{ij\beta} + \lambda^{\alpha}_{i\beta j})\omega^{j}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]i} \cong 0.$$

Воспользуемся свойствами (2_3, 2_4):

$$\Delta N^{\alpha}_{\beta ij} + \omega^{\alpha}_{[ij]\beta} \cong 0, \; \Delta N^{\alpha}_{\beta\gamma i} + \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]i} \cong 0. \qquad (28)$$

Если выполняются условия

$$\omega^{\alpha}_{[ij]\beta} \cong 0, \; \omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]i} \cong 0, \qquad (29)$$

то дифференциальные сравнения (28) принимают тензорный вид

$$\Delta N^{\alpha}_{\beta ij} \cong 0, \; \Delta N^{\alpha}_{\beta\gamma i} \cong 0.$$

Теорема 5. *Объекты внешней и внутренней неголономности* $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ *фактор-многообразия* ${}^{N}F^{N}_{n-m}$ *полуголономного многообразия* M^{S}_{n} *удовлетворяют дифференциальным сравнениям (28), то есть в общем случае не являются тензорами.*

Следствия:

1) если выполняется условие (29$_1$*), то* $N^{\alpha}_{\beta ij}$ *— тензор, поэтому при* $N^{\alpha}_{\beta ij}=0$ *фактор-многообразие является внутренне неголономным многообразием* F^{N}_{n-m}*;*

2) если справедливо условие (29$_2$*), то* $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ *— тензор, поэтому при* $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}=0$ *фактор-многообразие является внешне неголономным многообразием* ${}^{N}F_{n-m}$*;*

3) если выполняются условия (29), то объекты внешней и внутренней неголономности $N^{\alpha}_{\beta ij}$, $N^{\alpha}_{\beta\gamma i}$ *— тензоры, поэтому при их аннулировании фактор-многообразие является, вообще говоря, полуголономным многообразием* F^{S}_{n-m}.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Диф. геом. многобр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

3. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

5. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I // Тр. геом. семин. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

Ju. Shevchenko

Quotient manifolds generated by holonomic distributions on smooth manifolds

On a smooth manifold holonomic distribution which generates the quotient manifold is considered. Using structure Laptev equations and Akivis derivation formulae holonomic, semi-holonomic, internally and externally non-holonomic smooth manifolds are defined. It is proved that the quotient manifold of semi-holonomic manifold is internally and externally non-holonomic, and quotient manifold of holonomic manifold is holonomic.

Key words: structure equations of Laptev, derivational formulae of Akivis, holonomic distribution, quotient manifold, non-holonomic smooth manifold.

УДК 514

А. М. Шелехов
Московский педагогический государственный университет
amshelekhov@rambler.ru

Об «окошках» в параллелограмме

Задав два параметра, можно построить новый параллелограмм внутри заданного. Бесконечное повторение этой процедуры (с разными, вообще говоря, параметрами) приводит к некоторому предельному положению — «окошку». Положение последнего и его размеры определяются последовательностью параметров. Рассмотрены примеры, приведены числовые оценки.

Ключевые слова: параллелограмм, бесконечное произведение, формула Валлиса, симметрические многочлены.